

逆行列

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L09(2025-05-07 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-09 Fri 06:22 JST hig"

今日の目標

- 正則行列, 逆行列, 行列のべき乗の定義を説明できる

石村畑 線形代数 §2.3

- 対角行列, 2 次正則行列の逆行列を求められる

石村畑 線形代数 §2.3



L08-Q1

Quiz 解答: 平面のパラメタ表示とベクトル方程式

① パラメタ表示は

$$\vec{p} = (13, 2, 1) + (0, 1, 3)t + (0, 5, 2)s \quad (t, s \text{ はパラメタ})$$

② $\vec{d}, \vec{f}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f} = (-13, 0, 0)$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$(-13, 0, 0) \cdot (\vec{p} - (13, 2, 1)) = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

- ③ 点 $(13, 9, 9)$ が平面上にあるか、とは、平面と点の共有点を求めろ（それは空集合か？）ということ．

平面のパラメタ表示 $(13, 2, 1) + (0, 1, 3)t + (0, 5, 2)s$ を、点の方程式 $x - 13 = y - 9 = z - 9 = 0$ に代入し、

$$(13) - 13 = (2 + t + 5s) - 9 = (1 + 3t + 2s) - 9 = 0.$$

これを解いて、 $t = 2, s = 1$. 共有点は、

$\{(13, 2, 1) + (0, 1, 3)t + (0, 5, 2)s | t = 2, s = 1\}$. すなわち、共有点の集合は $\{(13, 9, 9)\} \neq \emptyset$. よって、 $(13, 9, 9)$ は平面上にある．

$(1, 1, 3)$ について同様に考えると、 t, s は解なしとなり、共有点の集合は空集合．点 $(1, 1, 3)$ は平面上にない．

- ④ 点 $(13, 9, 9)$ が平面上にあるか、とは、平面と点の共有点を求めろ（それは空集合か？）ということ。

点の「パラメタ表示」 $\{(13, 9, 9)\}$ を，平面の方程式に代入してチェックすると， $13 - 13 = 0$ と成立している．よって，共有点の集合は $\{(13, 9, 9)\} \neq \emptyset$ ．よって， $(13, 9, 9)$ は平面上にある．

$(1, 1, 3)$ について同様に考えると，平面の方程式に代入してチェックすると，方程式は満たされない．共有点の集合は空集合．点 $(1, 1, 3)$ は平面上にない．

L08-Q2

Quiz 解答: 平面と直線の共有点

パラメタ $t, s \in \mathbb{R}$.

直線 ℓ のパラメタ表示は $\vec{p} = (-1, -2, 0) + (3, 1, 2)t$. (1)

直線 ℓ の方程式は $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. (2)

平面 P のパラメタ表示は $\vec{p} = (0, 0, 1) + (3, 1, 0)t + (0, 1, -3)s$. (3)

平面 P の法線ベクトルは $(3, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 9, 3)$.

$\vec{n} = (1, -3, -1)$ も法線ベクトル.

平面 P の方程式は $(1, -3, 1) \cdot ((x, y, z) - (0, 0, 1)) = 0$. (4).

解 1. (1) を (4) に代入して, t について解くと $t = -3$. よって共有点は, 一点 $(8, 1, 6)$.

解 2. (3) を (2) に代入して, t, s について解くと $t = \frac{8}{3}, s = -\frac{5}{3}$. よって共有点は, 一点 $(8, 1, 6)$.

L08-Q3

Quiz 解答: パラメタ表示された平面とベクトル方程式で表示された直線の共有点

x 軸のパラメタ表示は, $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x$ ($t \in \mathbb{R}$). 方程式は $y = z = 0, x$ 任意.
 P のパラメタ表示は $(x, y, z) = (2, 3, 4) + (2, 0, 1)t + (0, 3, 2)s$ ($t, s \in \mathbb{R}$)
 パラメタ表示を $y = z = 0$ に代入して,

$$3 + 3s = 0$$

$$4 + t + 2s = 0$$

これを t, s について解いて, $t = -2, s = -1$.

これをパラメタ表示に代入すると,

$$(2, 3, 4) + (2, 0, 1)(-2) + (0, 3, 2)(-1) = (-2, 0, 0).$$

よって、共有点は、一点 $(-2, 0, 0)$.

L08-Q4

Quiz 解答: パラメタ表示された直線と方程式で書かれた平面の共有点

x 軸のパラメタ表示は、 $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x$ ($t \in \mathbb{R}$).

P のパラメタ表示は $(x, y, z) = (2, 3, 4) + (2, 0, 1)t + (0, 3, 2)s$ ($t, s \in \mathbb{R}$)

これを方程式で書く．法線ベクトルは $(2, 0, 1) \times (0, 3, 2) = (-3, -4, 6)$ なので、

$$(-3, -4, 6) \cdot (\vec{p} - (2, 3, 4))$$

すなわち、

$$-3(x - 2) - 4(y - 3) + 6(z - 4) = 0$$

これに直線のパラメタ表示を代入して、

$$-3(t - 2) - 4(0 - 3) + 6(0 - 4) = 0$$

よって、 $t = -2$.

パラメタ表示に $t = -2$ を代入して、共有点は、一点 $-2\vec{e}_x = (-2, 0, 0)$.

ここまで来たよ

⑧ 空間内の点と直線と平面の共有点

⑨ 逆行列

- 行列の積の性質
- 逆行列

行列の積の性質

定理 (行列の積の性質) 石村畑 線形代数 定理 2.2.1(p.37)

単位行列の性質 $AE = A, EA = A$ (E : 単位行列)

結合則 $(AB)C = A(BC)$ 線形代数☆演習 I(2025)L8 ... 積を計算する順序は自由

分配則 $A(B + C) = AB + AC$... 和と積の関係

分配則 $(A + B)C = AC + BC$

単位行列の性質の証明

A の (i, j) 成分を a_{ij} とするとき,

AE の (i, j) 成分は, $\sum_{k=0}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$

EA の (i, j) 成分は, $\sum_{k=0}^n \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$

δ の計算

$$\sum_{i=1}^n f(i) \delta_{ij} = f(j)$$

「 δ_{ij} が i の和に入ってたなら, i で和をとる代わりに $j = i$ を代入」

結合則の証明 線形代数☆演習 I(2025)L08

定義 (行列のべき乗 石村畑 線形代数 p.37)

ℓ 次正方行列 A と, 整数 $n \geq 0$ に対して,

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_n$$

$$A^1 = A$$

$$A^0 = E$$

べき=冪=巾=power

‘well-defined’

命題 (行列の指数法則)

ℓ 次正方行列 A と整数 $n, m \geq 0$ に対して,

$$A^n A^m = \underbrace{A \cdots A}_n \underbrace{A \cdots A}_m = A^{n+m}.$$

命題 (線形代数☆演習 I(2025)L8)

非自明な零因子の存在 $A \neq O, B \neq O$ かつ $AB = O$ となる A, B がある
非可換性 $AB \neq BA$ となる A, B がある

反例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

代数 (algebra) の予感

代数入門 (3 年)

対角行列の積，べき乗

復習：対角成分とは成分 a_{ii} . 対角行列とは，対角成分以外は 0 であるような行列

線形代数☆演習 I(2025)L07

命題 (対角行列の成分表示)

教科書に追加

n 次の対角行列 D の成分 d_{ij} は，対角成分 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ (ラムダ) とクロネッカーのデルタ記号 δ を用いて，次のように書ける．

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

証明

対角行列の積

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} =$$

ラムダ，ミュー

命題

対角行列の積 n 次の対角行列 A, B の対角成分をそれぞれ,

$\lambda_i (i = 1, \dots, n), \mu_i (i = 1, \dots, n)$ とする.

積 AB, BA はまた n 次の対角行列で, $AB = BA$ であり, 対角成分は

$\lambda_i \cdot \mu_i (i = 1, \dots, n)$.

べき乗 A^n はまた n 次の対角行列で, 対角成分は…

石村畑 線形代数 p.49

証明

L09-Q1

Quiz(対角行列の計算)

行列 $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ と、対角成分が $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 0$ の3次の対角行列 D_2 を考える.

- ① 和 $D_1 + D_2$ を求めよう.
- ② 積 $D_1 D_2, D_2 D_1$ を求めよう.
- ③ 逆行列 D_1^{-1} を求めよう.

ここまで来たよ

8 空間内の点と直線と平面の共有点

9 逆行列

- 行列の積の性質
- 逆行列

逆行列

石村畑 線形代数 §2.3

定義 (逆行列 石村畑 線形代数 p.42) n 次正方行列 A に対して,

$$AX = E_n, XA = E_n$$

となる n 次正方行列 X が存在するとき,

- A は正則 (non-singular) であるという.
- X は A の逆行列 (inverse) であるという

定理 (逆行列の一意性 石村畑 線形代数 定理 2.3.1) A が正則ならば, A の逆行列が存在し, ただひとつに定まる.

「一意的 (unique) に存在する」

証明

定義 (逆行列の記号)

A が正則のとき, A の逆行列を A^{-1} (エーインバース) とかく.

$\frac{1}{A}$ という書き方はしない.

$\frac{B}{A}$ という書き方は well-defined でない. $B^{-1}A$ なの AB^{-1} なの?

定義 (逆行列のべき)

ℓ 次行列 A が正則のとき, 整数 $n \geq 0$ に対して,

$$A^{-n} \stackrel{\text{def.}}{=} (A^n)^{-1}$$

命題 (行列の指数法則)

ℓ 次行列 A が正則のとき, $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} A^{n+m} &= A^n A^m, \\ (A^n)^m &= A^{nm}, \\ (A^n)^{-1} &= (A^{-1})^n \end{aligned}$$

定理 (2 次の行列の逆行列 石村畑 線形代数 定理 2.3.2(p.47))

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

- A は正則である $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.
- $ad - bc \neq 0$ のとき, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

証明

L09-Q2

Quiz(逆行列)

- ① 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよう.
- ② の逆行列 $(10A)^{-1} = (10 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix})^{-1}$ を求めよう.
- ③ 逆行列 $(A + A)^{-1}$ を求めよう.

対角行列の逆行列

命題 (対角行列の正則性・逆行列 教科書に追加)

n 次の対角行列 D の対角成分を λ_i ($i = 1, \dots, n$) とする.

- $\exists i$ s.t. $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow D$ は正則でない
- $\forall i \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow D$ は正則である
 - ▶ このとき, D^{-1} は n 次の対角行列で対角成分は $1/\lambda_i$ ($i = 1, \dots, n$).

積の逆行列

命題 (積の逆行列) 教科書に追加

n 次行列 A, B が正則のとき, 積 AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明

問 和 $A + B$ は正則? 証明 or 反例