

行列のべき乗の計算

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L10(2025-05-09 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-09 Fri 11:11 JST hig"

今日の目標

- 対角行列, 特別な上三角行列の n 乗を求められる, ケーリー・ハミルトンの定理を使って 2 次正方行列のべき乗を楽に計算できる 石村畑 線形代数 §1.4
- 行列の和, スカラー倍, 積, べき乗, 逆の混じった式を整理して簡単化できる



L09-Q1

Quiz 解答: 対角行列の計算

$$\textcircled{1} D_1 + D_2 = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 14 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} D_1 D_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 & & \\ & 3 \cdot 11 & \\ & & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & \\ & 33 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = D_2 D_1.$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} = E_3 \text{ より,}$$

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix}.$$

なお, D_2 は正則でない.

L09-Q2

Quiz 解答: 逆行列

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 7 \cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} \quad (10A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 20 & 70 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{-1100} = \begin{pmatrix} 50 & -70 \\ -30 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{110} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 10^{-1}A^{-1}.$$

emark よく考えると、スカラー $k \neq 0$ と正則行列 A について $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ であることに気づく.

$$\textcircled{3} \quad (A + A)^{-1} = (2A)^{-1} = 2^{-1}A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

ここまで来たよ

9 逆行列

10 行列のべき乗の計算

- 行列の積の性質
- 行列のべき乗

行列の積の逆行列

命題 (行列の積の逆行列 教科書に追加)

n 次正方行列 A, B が正則のとき, 積 AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明

問 和 $A + B$ は正則? 証明 or 反例

スカラー $k \neq 0$ と正則行列 A について $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

証明

mobius IH2.4

L10-Q1

Quiz(逆行列)

A, B が正則行列であるとき，次の積を展開して整理しよう．

- ① $(A + B)^2$
- ② $(A + B)(A - B)$
- ③ $(A + B)^3$
- ④ $((2A) + (2A)^{-1})^2$
- ⑤ $(AB + A^{-1}B^{-1})^2$

L10-Q2

Quiz(逆行列)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を考える.

- ① $AX = C$ を満たす 2 次正方行列 X が存在するなら求めよう.
- ② $YA = C$ を満たす 2 次正方行列 Y が存在するなら求めよう.
- ③ $BZ = C$ を満たす 2 次正方行列 Z が存在するなら求めよう.
- ④ $WB = C$ を満たす 2 次正方行列 W が存在するなら求めよう.

石村畑 線形代数 総合演習 2.3(p.52)

命題 (正則行列の左右逆行列 教科書に追加)

n 次正方行列 A が正則のとき,

$$AY = E$$

または

$$YA = E$$

ならば, $Y = A^{-1}$ である

「(正則であることが最初からわかっているなら) 左右一方だけチェックすればよい」

行列式 石村畑 線形代数 §3 を学ぶと, $AY = E$ から A が正則であることもわかる

ケーリー・ハミルトンの定理

石村畑 線形代数 定理 2.4.1

定理 (ケーリー・ハミルトン 石村畑 線形代数 定理 2.4.1)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E_2 = O_{22}.$$

$A^2 = (A \text{ の } 1 \text{ 乗}) + (A \text{ の } 0 \text{ 乗})$ の形で、べきを落とすのに使える。
反復した適用を漸化式にすると、 A^n の一般項を導くこともできる (が対角化でやったほうがいい)

L10-Q3

Quiz(ケーリー・ハミルトンによる行列のべき乗)

$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- ① ケーリー・ハミルトンの定理を利用して, A^2, A^3, A^4 を求めよう.
- ② A^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよう.

ここまで来たよ

9 逆行列

10 行列のべき乗の計算

- 行列の積の性質
- 行列のべき乗

行列の n 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2

簡単に計算できるケースとして次がある. n は行列の次数ではない.
より一般的な計算方法もある

対角化

定理 (行列の n 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2)

- ① $A^2 = cA$ (c : 実数) ならば, $A^n = c^{n-1}A$ ($n = 1, 2, \dots$).
- ② $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (対角行列) のとき, $A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- ③ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (上三角行列の特別な形) のとき, $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$)
- ④ $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (回転行列) のとき, $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
…ドモアブルの公式と関係あるが説明延期

石村畑 線形代数 問題 11(p.51) 例題 11(p.52) mobius IH1.4

証明 数学的帰納法による