

写像・平面の線形変換

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L11(2025-05-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-24 Sat 16:44 JST hig"

今日の目標

- 写像の記号, 言葉を正しく使える
- 行列により表現される線形変換の像を求められる

石村畑 線形代数 p.211

- 知っている「移動」と線形変換を関係づけられる



L10-Q1

Quiz 解答: 逆行列

- ① $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$
- ② $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2.$
- ③ $(A + B)^3 = A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB + BAB + BBA + B^3.$
- ④ $((2A) + (2A)^{-1})^2 = 4A^2 + 2E + \frac{1}{4}A^{-2}.$
- ⑤ $(AB + A^{-1}B^{-1})^2 =$
 $ABAB + ABA^{-1}B^{-1} + A^{-1}B^{-1}AB + A^{-1}B^{-1}A^{-1}B^{-1}.$ 特に
 $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2.$

L10-Q2

Quiz 解答: 逆行列

- ① A は正則なので, 左から A^{-1} をかけて, $X = A^{-1}C = (\text{成分で}).$
- ② A は正則なので, 右から A^{-1} をかけて, $Y = CA^{-1} = (\text{成分で}).$

- ③ 1 次方程式を解いて Z の成分を求めようとすると、解なしになるので、存在しない.
- ④ 1 次方程式を解いて W の成分を求めようとすると、解なしになるので、存在しない.

L10-Q3

Quiz 解答: ケーリー・ハミルトンによる行列のべき乗

- ① $A^2 = (-2 + 1)A - (-2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1)E = -A - E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
 $A^3 = (-2 + 1)A - (-2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1)E = -A^2 - A = -(-A - E) - A = E$. $A^4 = EA = A$. 以下繰り返す.
- ② $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$A^n = \begin{cases} E & (n = 3k) \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (n = 3k + 1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & (n = 3k + 2) \end{cases}$$

ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換

- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

写像

石村畑 線形代数 §5.6

定義 (写像)

2つの集合 (set) X, Y において, X のどの要素 (element, 元ともいう) にも, Y の要素が1つずつ対応しているとき, この対応 (規則) を X から Y への写像 (map, mapping) という. X を写像 f の定義域 (domain), Y を写像 f の終域 (codomain), 終集合 (target set) という.

写像の記号

$$f : X \rightarrow Y$$

写像名 : 定義域 (集合) $\rightarrow$ 終域 (集合)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 $\mapsto$ 像

$f(a) = b$ とにかく. b を「 f による a の像 (image)」という
 「 f は a を b に写す」「 a は f で b に写される」などという.

写像の例

X =実数全体または部分集合, Y =実数全体, というケースに限定したとき, 写像の定義は, (以前から知っている) **関数** (function) の定義に一致する.

例 (実数から実数への写像=関数)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto x^2 \quad \text{高校なら関数 } f(x) = x^2 \text{ と書くところ.}$$

写像は, $\mathbb{R}$ と限らない一般の集合 X, Y に対しても考えられる. ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$ とか.

例 (直線のパラメタ表示は写像の例)

平面内の場合 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

(空間内なら $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$)

$$f: t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

同様に使う書き方: $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$

例

空間内の平面のパラメタ表示は から への写像

$$\vec{p}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} s$$

例

平面内の直線の方程式の $f(\vec{x})$ は から への写像

$$f(\vec{x}) = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 3x + 2y + 3 = 0$$

例

空間内の平面の方程式の $f(\vec{x})$ は から への写像

$$f(\vec{x}) = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 3x + 2y + 5z + 3 = 0$$

空間内の直線の方程式は から への写像 を使って書ける.

変換

石村畑 線形代数 p.211

定義 (変換)

集合 X から X 自身への写像を X の **変換** (transformation) という.

写像で, $Y = X$ のケースということ.

例 (実数の変換)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto e^x$$

(実数全体で定義された) 関数は, 実数全体の集合の変換.

ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換

- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

線形変換 石村畑 線形代数 p.211, §5.6

定義 (線形変換)

線形空間 石村畑 線形代数 §5.1 V から V への線形写像 石村畑 線形代数 §5.5 を **線形変換 1 次変換** という. 線形代数 II

これは予告. 線形空間や線形写像は今後定義される.

定義 ((2 次正方行列により表現される) 線形変換, 1 次変換 石村畑 線形代数 定理 5.7.1)

$\mathbb{R}^n$ の変換で,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

の形のものを, 2 次正方行列 A により表現される **線形変換, 1 次変換** (linear transformation) という. $f = f_A$ と書く.

ここから, ベクトルは原則として縦ベクトルとする. 縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を, 2 行 1 列の行列とみなし, 行列の積を使った.

$\mathbb{R}^n$, n 次正方行列に対しても同様に定義される.

写像 f と, 行列 A は, 対応はするけど別もの. 記号を混ぜてはいけない. f は写し方のルール, A は数を並べて書いたもの.

例題

行列 A と $\vec{x}$ から像 $A\vec{x}$
計算例

$$\vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

mobius IH2.5

$\vec{x}$ と像 $A\vec{x}$ から行列 A

L11-Q1

Quiz(線形変換の表現行列の決定)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、2 次正方行列 A の表現する $\mathbb{R}^2$ の線形変換とする.

- ① $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \vec{e}_1, f(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \vec{e}_2$ であるとき, A の成分を求めよう.
- ② $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ であるとき, A の成分を求めよう.

石村畑 線形代数 問題 50(p.194) mobius IH2.5

これは確かに線形写像

命題 (線形性)

n 次行列 A に対して,

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f: \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

とする.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$f(a\vec{x}) = af(\vec{x})$$

実はこれは線形写像が (定義により) 満たす性質.

特に, $a = 0$ とおいて, $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

証明 行列の積の性質 (分配則, スカラー倍) から.

ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換

- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

線形変換の行列から日本語の記述へ

ベクトルを位置ベクトルと思うと、 $\mathbb{R}^2$ の線形変換は、平面の「移動」高校数学 II の一種.

L11-Q2

Quiz(行列で与えられた線形変換の意味 (鏡映))

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の表現する $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. A を、高校数学的に「 $\bigcirc\bigcirc$ に関する $\bigcirc\bigcirc$ 移動」のように表現しよう.

方針

具体的な (特殊でない) 点を何個か写してみる, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を写してみる, ことで意味を考える.

日本語の記述から線形変換の行列へ

L11-Q3

Quiz(線形変換の表現行列の決定)

次の xy 平面すなわち $\mathbb{R}^2$ の「移動」すなわち変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、行列で表現される線形変換か. そうである場合, その行列 A を求めよう.

- ❶ x 軸方向の $+3$ の平行移動
- ❷ 直線 $y = x$ に関する線対称移動
- ❸ 直線 $y = 1$ に関する線対称移動

方針

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ を式で考え, それが $A\vec{x}$ の形に書き直せるか考える.

石村畑 線形代数 問題 46(p.182), 問題 49(p.192)