

線形変換による直線の像

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L12(2025-05-16 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-16 Fri 11:33 JST hig"

今日の目標

- 定義域の部分集合の像，値域を説明できる
- 線形変換による線分，直線の像を求められる



L11-Q1

Quiz 解答: 線形変換の表現行列の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

$$\textcircled{1} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$1a + 2b = 1,$$

$$1c + 2d = 0,$$

$$3a + 4b = 0,$$

$$3c + 4d = 1.$$

これを a, b, c, d について解いて, $A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

実は, $A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = E$ から $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めたことに相当する.

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ を } a, b, c, d \text{ について解いて,}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

L11-Q2

Quiz 解答: 行列で与えられた線形変換の意味 (鏡映)

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ なので, 「 x 軸に関する線対称移動」

大学的には「 x 軸に関する鏡映変換 (reflection)」

L11-Q3n

Quiz 解答: 線形変換の表現行列の決定

- ① $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, $A\vec{x}$ の形に書けない ('定数項' $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を消せない) ので, 行列で表現される線形変換でない.

別解 (背理法) f が行列で表現される線形変換なら $f(\vec{0}) = \vec{0}$. しかし, $f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. 矛盾. よって行列で表現される線形変換ではない.

- ② この変換は、 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

は、 x, y についての恒等式. $a = d = 0, b = c = 1$ が解. よって、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換である. 「直線 $y = x$ に鏡映変換 (reflection)」

別解 線形変換だとすると、一般の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ でなくても、必要条件として具体的な $(\mathbb{R}^2$ なら) 2 点、例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を決定できる. 実際、 $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ は線対称移動を表していることがわかる.

- ③ (背理法) f が行列で表現される線形変換なら $f(\vec{0}) = \vec{0}$. しかし、 $f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. 矛盾. よって行列で表現される線形変換ではない.

ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像

- 線形変換の性質
- 部分集合の像, 値域
- いろいろな線形変換

線形変換と平行四辺形

命題

原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルは，
（正則な行列で表現される）線形変換により
原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルに写る．

証明

原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルを，
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ とする．

線形変換 f で写すと，線形性により，

$$f(\vec{a}), f(\vec{b}), f(\vec{c}) = f(\vec{a} + \vec{b}) \stackrel{\text{線形変換の線形性}}{=} f(\vec{a}) + f(\vec{b}).$$

実は， $f(\vec{a}), f(\vec{b}), f(\vec{c})$ が，零ベクトルや，平行なベクトルに写ったりする心配があるが，正則を課しておくこれらの可能性は除かれる．後で見る

写像の相等

定義 (写像の相等)

$f: X \rightarrow Y$ と $g: Z \rightarrow W$ が等しい ($f = g$) (写像として等しい) とは,
 $X = Z, Y = W$ でありかつ, $\forall x \in X \quad f(x) = g(x) \in Y$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

命題 (線形変換と行列の 1 対 1 対応)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換が $f = g$ であること

$\Leftrightarrow f, g$ を表現する行列 A, B の 4 個の成分 a_{ij}, b_{ij} がそれぞれ等しいこと

証明 $\Rightarrow$)

$$f(\vec{e}_1) = g(\vec{e}_1) \text{ より, } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{e}_2) = g(\vec{e}_2) \text{ より, } \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$)

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = B\vec{x} = g(\vec{x}).$$

基本ベクトルと線形変換

命題

$\mathbb{R}^2$ の線形変換は $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の像で決まる.

主張「決まる」の正確な内容は,

命題

線形変換 $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $f(\vec{e}_1) = g(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) = g(\vec{e}_2)$ ならば $f = g$

証明 $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, 線形変換の線形性を用いて,
$$f(\vec{x}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yg(\vec{e}_2) = xg(\vec{e}_1) + yg(\vec{e}_2) = g(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = g(\vec{x}).$$

実は, ペア $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ でなくても, 「線形独立」 石村畑 線形代数 §5.3 や, 「基底」

石村畑 線形代数 §5.4 でありさえすれば, 同じことが言える

ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像

- 線形変換の性質
- 部分集合の像, 値域
- いろいろな線形変換

復習：平面上の直線のパラメタ表示

$\vec{a}$ を通り $\vec{d} (\neq \vec{0})$ に平行な直線のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

$$\text{すなわち } \vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ はパラメタ})$$

$\vec{d}$ を直線の方向ベクトル 石村畑 線形代数 p.16, 接(線)ベクトル 教科書に追加 という.

線分のパラメタ表示 石村畑 線形代数 p.13

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の, $\vec{a}, \vec{b}$ を端点とする線分のパラメタ表示である.

$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + t\vec{d}$ と書き直すと, 直線のパラメタ表示において, パラメタ t の動く範囲 $\mathbb{R}$ を制限したものとみられる.

$0 \leq t \leq 1$ と限定する必要はない. $t_0 \leq t \leq t_1$ とすれば, $\vec{a} + t_0\vec{d}, \vec{a} + t_1\vec{d}$ を端点とする線分.

部分集合の像, 値域

定義 (部分集合の像)

写像 $f: X \rightarrow Y$ と, 定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して,
 $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, f による S の像といい, $f(S)$ と書く.

既に定義したのは, 一点 $x \in X$ の像 $f(x) \in Y$.

定義 (値域 (range))

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して,
定義域 $X \subset X$ の像 $\{f(x) | x \in X\} \subset Y$ を f の値域といい, $f(X)$ とと書く.

線形変換による直線の像

直線 ℓ のパラメタ表示を $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ ($t \in \mathbb{R}$) とする.

すなわち, $\ell = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\}$.

その像のパラメタ表示は,

$$f(\vec{a} + t\vec{d}) = f(\vec{a}) + tf(\vec{d}).$$

$f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ ならば, これは, $f(\vec{a})$ を通り, $f(\vec{d})$ に平行な直線のパラメタ表示.

すなわち, 線形変換 f による ℓ の像は,

$$f(\ell) = \{f(\vec{a} + t\vec{d}) | t \in \mathbb{R}\} = \{f(\vec{a}) + tf(\vec{d}) | t \in \mathbb{R}\}.$$

命題 (直線の像)

線形変換 f で, 直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ ($t \in \mathbb{R}$) は, 直線 $\vec{p} = f(\vec{a}) + tf(\vec{d})$ ($t \in \mathbb{R}$) に写る. ($f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら)

命題

線形変換で線分は線分に写る, 端点は端点に写る. ($f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら)

原点を通る直線は, $\vec{d} \neq \vec{0}$ により, $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{d}$ ($t \in \mathbb{R}$) とパラメタ表示できる.

その像のパラメタ表示は, $f(\vec{p}) = f(\vec{0} + t\vec{d}) = f(\vec{0}) + tf(\vec{d}) = \vec{0} + tf(\vec{d})$ ($t \in \mathbb{R}$).

命題

線形変換で, 原点を通る ($\vec{a} = \vec{0}$) 直線は原点を通る直線に写る.
($f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら)

L12-Q1

Quiz(パラメタ表示された直線の線形変換による像)

パラメタ表示

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ を考える.

- ① 直線 ℓ を描こう.
- ② 直線 ℓ 上の点を2つ見つけよう ($\vec{x}_1, \vec{x}_2$ とする).
- ③ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される線形変換 f による ℓ の像のパラメタ表示を求め, 描こう.
- ④ 像 $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2)$ を求めよう.

mobius IH2.5.30

ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像

- 線形変換の性質
- 部分集合の像，値域
- いろいろな線形変換

$\mathbb{R}^2$ のいろいろな線形変換

例

- x 軸に関する鏡映変換 (reflection) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- y 軸に関する鏡映変換 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 直線 $y = x$ に関する鏡映変換 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

例

- 原点に関する**反転**変換 (inversion) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 相似比 k のスケール変換 (scaling) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kE$
- **恒等変換** (identity) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

例 (回転変換 石村畑 線形代数 p.259)

- 一般角 θ の**回転**変換 (rotation) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$