

線形変換の合成

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L13(2025-05-23 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-23 Fri 12:16 JST hig"

今日の目標

- 線形変換の合成変換の表現行列が、表現行列の積であることを説明できる 石村畑 線形代数 p.192
- 平面の回転変換の表現行列を使える 石村畑 線形代数 p.49,p.212



L12-Q1

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の線形変換による像

- ① 略
- ② 例えば $t = 0, 1$ に対して, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- ③ $\vec{p} = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)t + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ すなわち
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- ④ $f(\vec{x}_1) = A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\vec{x}_2) = A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. これらは, f による ℓ の像の上にある ($t = 0, 1$).

ここまで来たよ

12 いろいろな線形変換

13 線形変換の合成

- 線形変換の合成
- 回転変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
$\mathbb{R}^2$ の点 $\vec{x}$	2次元ベクトル $\vec{x}$
$\mathbb{R}^2$ の線形変換 f $\vec{x}$ の像は $f(\vec{x})$	2次正方行列 A 行列とベクトルの積 $A\vec{x}$
線形変換 f, g の合成変換 $g \circ f$ $\vec{x}$ の像は $g(f(\vec{x}))$	行列の積 BA 行列とベクトルの積 $B(A\vec{x})$

線形変換の合成

定義 (合成写像 石村畑 線形代数 定理 5.7.3)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ があるとき, $x \in X$ を, **まず f , 次に g で写すこと**で像を得る写像

$$h: X \rightarrow Z$$

を考え, $h = \mathbf{g \circ f}$ と書く.

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.

この h を, f と g の**合成写像** (composition) という.

- $X = Y = Z$ なら, f, g, h は X の変換. h は**合成変換**
- $Z = Y = \mathbb{R}$ なら f, g は関数, h は**合成関数**

合成写像は f, g の順序による

f と g , g と f の合成写像は異なる. $g \circ f \neq f \circ g$.

L13-Q1

Quiz(写像の合成)

$\mathbb{R}$ の変換 f, g を考える.

$$f : x \mapsto \sin x,$$

$$g : x \mapsto x^2 + 3.$$

- ① 実数 x を, まず f で写し, 次に g で写した像を答えよう.
- ② 実数 x を, まず g で写し, 次に f で写した像を答えよう.
- ③ 合成変換 $g \circ f$ の像 $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
- ④ 合成変換 $f \circ g$ の像 $(f \circ g)(x)$ を求めよう.

L13-Q2

Quiz(線形変換の合成と行列の積)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換を考える.

- ① x 軸に関する鏡映変換 f を表す行列 A を求めよう.
- ② 直線 $y = -x$ に関する鏡映変換 g を表す行列 B を求めよう.
- ③ 行列の積 BA を計算しよう.
- ④ 行列の積 AB を計算しよう.
- ⑤ 点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を, まず f で, 次に g で写した像を求めよう (順に写す, 行列を一度にかける, の2つの方法で).
- ⑥ 点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を, まず g で, 次に f で写した像を求めよう (順に写す, 行列を一度にかける, の2つの方法で).

mobius IH2.5

線形変換の合成変換

線形変換 $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が, 2 次正方行列 A, B で表されるとする.

まず f , 次に g

まず, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ を f で写す

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

次にこれを, g で移動

$$g(f(\vec{x})) = B(A\vec{x})$$

合成写像の定義より

$$g(f(\vec{x})) = (g \circ f)(\vec{x}).$$

行列の積の性質より

$$B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}.$$

合成変換 $g \circ f$ は行列 BA により表現される

まず g , 次に f

まず, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ を g で写す

$$g(\vec{x}) = B\vec{x}.$$

次にこれを, f で移動

$$f(g(\vec{x})) = A(B\vec{x})$$

合成写像の定義より

$$f(g(\vec{x})) = (f \circ g)(\vec{x}).$$

行列の積の性質より

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}.$$

合成変換 $g \circ f$ は行列 BA により表現される

命題 (合成変換の表現行列)

石村畑 線形代数 定理 5.7.3

線形変換 $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を表現する行列をそれぞれ A, B とする.

まず g で写す合成変換 $f \circ g$ を表現する行列は AB である. $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ の像は $f(g(\vec{x})) = (AB)\vec{x}$ である.

まず f で写す合成変換 $g \circ f$ を表現する行列は BA である. $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ の像は $g(f(\vec{x})) = (BA)\vec{x}$ である.

3 個以上の写像の合成, 3 個以上の行列の積

石村畑 線形代数 p.194

f, g, h を写像とする.
 任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

$\leadsto$ 3 個の合成写像は, 2 個ずつの合成をどの順序でしても, 像は同じ.

写像の結合法則 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書きちゃう.

f, g, h が線形変換とし, これらを表す行列を A, B, C とする.

$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の表す行列を考えて,

当然, 表現する行列も同じになるべき. 行列の積の結合法則

石村畑 線形代数 p.194

として既に知っていた.

$$C(BA) = (CB)A.$$

L13-Q3

Quiz(線形変換の合成)

最初に直線 $y = x$ に関する鏡映, 次に原点を中心とする反時計まわりの角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転, 最後に y 軸に関する鏡映を行う.

- ① 3つの線形変換それぞれを表す行列を書こう
- ② 3つの線形変換の合成変換を表す行列を書こう

石村畑 線形代数 問題 49(p.192) mobius IH2.5

ここまで来たよ

12 いろいろな線形変換

13 線形変換の合成

- 線形変換の合成
- 回転変換

回転変換

例 (回転変換)

原点のまわりに、**反時計まわり**に一般角 θ だけ回転移動する線形変換 f_θ ($\theta \in \mathbb{R}$) を表す行列 (**回転行列**) は

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

なぜなら、線形変換であることを仮定して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

から 行列 R_θ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

弧度法（ラジアン, radian）

度 d°	0°	30°	90°	180°	360°	d°
ラジアン θ	0	$\pi/6$	$\pi/2$	π	2π	$\theta = \frac{d}{180}\pi$
	半径 r , 頂角 θ の扇型			半径 r の円		
円弧長	$r\theta$			$r \cdot 2\pi = 2\pi r$		
面積	$\frac{1}{2}r^2\theta$			$\frac{1}{2}r^2 2\pi = \pi r^2$		

回転の文脈で、 θ を測る向きが明示されていないときは反時計まわりとおもう。そうしないと、 $y = \sin \theta$ にならない。

命題 (回転行列の合成)

R_θ を 2 次元の回転行列とするとき, $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.

証明 加法定理

定理 (回転行列の n 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2)

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (回転行列) のとき, $R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = R_{n\theta}$
($n \in \mathbb{Z}$).

現時点では $n \geq 0$.