

行列式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L14(2025-05-28 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-28 Wed 07:20 JST hig"

今日の目標

- 1,2,3 次元の行列式を計算できる 石村畑 線形代数 §3.1
- 1,2,3 次元の行列式が、線形変換の、長さ、面積、体積拡大率の意味を持つことを説明できる

線形代数☆演習 I(2025)L03

線形代数☆演習 I(2025)L04

線形代数☆演習 I(2025)L05



L13-Q1

Quiz 解答: 写像の合成

- ① $f(x) = \sin x$. $g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
- ② $g(x) = x^2 + 3$. $f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.
- ③ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
- ④ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.

L13-Q2

Quiz 解答: 線形変換の合成と行列の積

- ① $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ② $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$.
 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ③ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ④ $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\textcircled{5} \quad (g \circ f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{6} \quad (f \circ g)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

L13-Q3

Quiz 解答: 線形変換の合成

$$\textcircled{1} \quad \text{直線 } y = x \text{ に関する鏡映変換 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{角 } \frac{1}{4}\pi \text{ の回転変換 } B = R_{\frac{1}{4}\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad y \text{ 軸に関する鏡映変換}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{3} \quad CBA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R_{\pi/4}.$$

区別しよう

- まず f , 次に g (まず A , 次に B) は, $g \circ f$ で写す (BA を左からかける)
- 行列とベクトルは違う
- 写像と行列は違う
- 集合と点は違う

ここまで来たよ

13 線形変換の合成変換

14 行列式

- 1,2,3 次元の行列式

行列式 (determinant)

石村畑 線形代数 §3.0

定義 (1 次正方行列の行列式)

石村畑 線形代数 §3.1

成分が実数の 1 次正方行列全体 $\mathcal{M}(1,1)$ から、実数 $\mathbb{R}$ への、次の写像を、**行列式 (determinant)** という。

$$\det : \mathcal{M}(1,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det : A = (a) \mapsto a$$

変な名前… 式でも行列でもない。値も数。

写像だから $\det(A) = a$ と書きそうだが、括弧を略して、 $\det A = a$ とも

($\sin(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$ のように

長さ拡大率

長さ $|x|$ の 1 次元ベクトル $\vec{x} = (x)$ は、 $A = (a)$ で表される線形変換により、 $a\vec{x} = (ax)$ に写る。

命題 (長さ拡大率としての 1 次行列式)

$\mathbb{R}$ の長さ 1 の線分は、 A の表す線形変換により、 $|\det A|$ 倍に拡大される

$\det A > 0$ なら同じ向き、 $\det A < 0$ なら逆向き。

$\det A = 0$ なら 1 点 $\vec{0}$

定義 (2 次正方行列の行列式 石村畑 線形代数 §3.1)

成分が実数の 2 次正方行列全体 $\mathcal{M}(2, 2)$ から、実数 $\mathbb{R}$ への、次の写像を、**行列式 (determinant)** という.

$$\det : \mathcal{M}(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

n 次すべてに同じ名前 $\det$ を流用.

写像の値 $\det(A)$ を「 A の行列式」という.

$\det(A) = ad - bc$ と書きそうだが、略して、 $\det A = ad - bc$,

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ とも書く.

$\det A = |A| = ad - bc$ とも書く. さらに略して、 $\left| \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right| = ad - bc$ とも書く.

無理に行列式の絶対値と書きたいときは、

$$|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|$$

$ad - bc$ との出会い

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

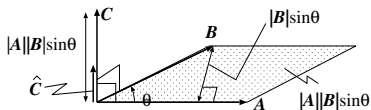
- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のとき, 三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}|ad - bc|$, 平行四辺形 OABC の面積は $|ad - bc|$. 石村畑 線形代数 p.7
- $ad - bc \neq 0$ なら A は正則 (逆行列を持つ), $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,
 $ad - bc = 0$ なら逆行列を持たない. 石村畑 線形代数 定理 2.3.2
- $A^2 - (a + d)A + (\det A)E = O$. 石村畑 線形代数 定理 2.4.1(ケーリー・ハミルトン)

平行四辺形の面積

$\vec{a} = (a, c, 0), \vec{b} = (b, d, 0) \in \mathbb{R}^3$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の絶対値 (長さ) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は, $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい. 線形代数☆演習 I(2025)L03

線形代数☆演習 I(2025)L04

$$(a, c, 0) \times (b, d, 0) = (0, 0, ad - bc).$$



面積拡大率

原点を始点とする 2 次元ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 2 辺とする面積 1 の正方形は,

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される線形変換 f により,

$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を 2 辺とする平行四辺形 (面積 $|\det A|$) に写される.

命題 (面積拡大率としての 2 次行列式)

$\mathbb{R}^2$ の 1×1 正方形の面積は, A で表される線形変換により, $|\det A|$ 倍に拡大される

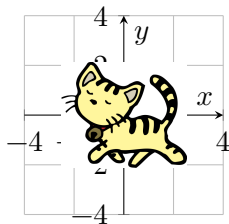
$\det A > 0$ なら表向き, $\det A < 0$ なら裏返し.

$\det A = 0$ ならつぶれる

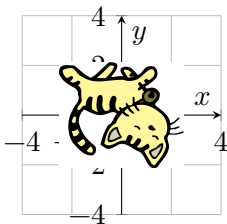
石村畑 線形代数 Column(p.263)

面積拡大率 I

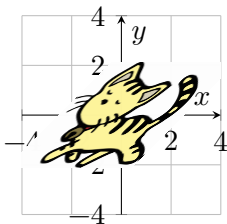
元の画像



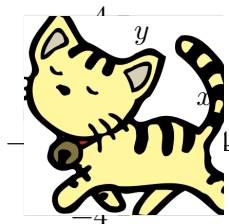
面積拡大率 1, 表向き



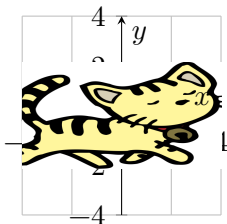
原点に関する反転 面積拡大率 1, 表向き



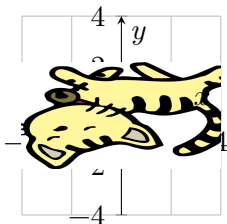
相似比 2 のスケール変換 面積拡大率 4, 表向き



面積拡大率 2, 裏向き



面積拡大率 2, 裏向き



L14-Q1

Quiz(2 次の行列式)

A を 2 次正方行列, $k \in \mathbb{R}$ とする. 次の行列式を $\det A$ で表そう. 途中では必要なら $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$, とおいて計算すること.

- ① $\det O_{22}$
- ② $\det kE_2$
- ③ $\det kA$
- ④ $\det(A + A)$
- ⑤ $\det A \neq 0$ のとき, $\det(A^{-1})$

L14-Q2

Quiz(2 次の行列式)

$\mathbb{R}^2$ の, 次の線形変換を表す行列の行列式を求めよう.

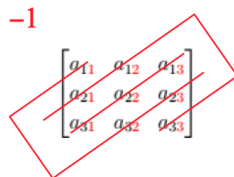
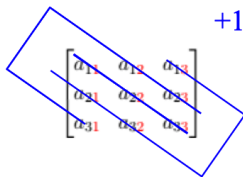
- ① 角 θ の回転変換
- ② 恒等変換
- ③ x 軸に関する鏡映変換
- ④ 直線 $y = x$ に関する鏡映変換
- ⑤ 原点に関する反転変換
- ⑥ 相似比 3 のスケール変換
- ⑦ 相似比 $1/3$ のスケール変換

定義 (3 次正方行列の行列式 石村畑 線形代数 §3.1)

成分が実数の 3 次正方行列全体 $\mathcal{M}(3,3)$ から、実数 $\mathbb{R}$ への、次の写像を、**行列式** (determinant) という.

$$\det : \mathcal{M}(3,3) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



サラスの公式

L14-Q3

Quiz(行列式)

次の行列式の値を求めよう．これらの表す線形変換は，面積，体積を何倍にするか，表向き裏向き（鏡像）いずれに写すか．

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

mobius IH3.1

石村畑 線形代数 問題 12, 問題 13

3 次の $\det A$ との出会い

$\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3), \vec{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3), \vec{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)$ のとき,
 スカラー 3 重積 線形代数☆演習 I(2025)L04 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}.$

命題 (スカラー 3 重積と 3 次の行列式の関係)

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ のスカラー 3 重積と,
 横ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を重ねて書いて作った 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$ の行列式, 縦
 ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を並べて書いて作った 3 次正方行列 $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$ の行列式とは
 等しい.

スカラー 3 重積の絶対値 $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ は, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の
 体積.

スカラー 3 重積の符号 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ なら右手系, < 0 なら左手系.

原点を始点とする右手系の 3 次元ベクトル

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, を 3 辺とする体積 1 の立方体は,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

で表される線形変換 f により,

$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を 3 辺とする平行六面体に写される.

命題 (体積拡大率としての 3 次行列式)

$\mathbb{R}^3$ の $1 \times 1 \times 1$ 立方体の体積は, A で表される線形変換により, $|\det A|$ 倍に拡大される

$\det A > 0$ なら右手系のまま, $\det A < 0$ なら鏡像がとられて左手系になる.

$\det A = 0$ ならつぶれる