

線形変換の逆変換

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L15(2025-05-30 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-30 Fri 07:16 JST hig"

今日の目標

- 線形変換の逆変換の表現行列が、表現行列の逆行列であることを説明できる

教科書に追加



L14-Q1

Quiz 解答:2 次の行列式

- ① $\det O_{22} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$
- ② $\det kE_2 = k \cdot k - 0 \cdot 0 = k^2$
- ③ $\det kA = ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 \det A$
- ④ $\det(A + A) = \det 2A = 4 \det A$
- ⑤ $\det A \neq 0$ のとき,

$$\det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = (\det A)^{-2} \det A = (\det A)^{-1}.$$

L14-Q2

Quiz 解答:2 次の行列式

- ① 1.
- ② 1.
- ③ -1.
- ④ -1.

- ⑤ 1
- ⑥ 3^2 .
- ⑦ 3^{-2} .

L14-Q3

Quiz 解答: 行列式

- ① $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -13$. 面積を 13 倍にする. $-13 < 0$ より裏向きに写す.
- ② サラスの公式より,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 5 - 0 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= 0 + 9 + 25 - 0 - 10 - 6 = 18.$$
18 倍にする. $18 > 0$ よりそのまま (表向きのまま, 右手系を保って) 写す.

ここまで来たよ

14 行列式

15 線形変換の逆変換

- 逆変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
$\mathbb{R}^2$ の点 $\vec{x}$	2次元ベクトル $\vec{x}$
$\mathbb{R}^2$ の線形変換 f	2次正方行列 A
$\vec{x}$ の像 $f(\vec{x})$	行列とベクトルの積 $A\vec{x}$
線形変換 f, g の合成変換 $g \circ f$	行列の積 BA
線形変換 f の逆変換 f^{-1}	逆行列 A^{-1}

写像の逆像

写像 $f : X \rightarrow Y$, X : 定義域, Y : 終域

定義 (復習：部分集合の像 線形代数☆演習 I(2025)L12)

写像 $f : X \rightarrow Y$ と, 定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して,
 $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, f による S の像といい, $f(S)$ と書く.

定義 (集合の逆像 教科書に追加)

部分集合 $T \subset Y$ に対して, X の部分集合 $\{x \in X | f(x) \in T\}$ を, f による T の逆像といい, $f^{-1}(T)$ とかく.

方程式の解と逆像

「連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x+3y=23 \end{cases}$ を解け」「解は $(x, y) = (4, 5)$ 」
は、

「 $(\frac{1}{2} \frac{1}{3})$ で表される線形変換 f による、1 点からなる集合 $\{(\frac{9}{23})\}$ の逆像を求めよ」「 $\{(\frac{4}{5})\}$ 」に相当.

線形代数☆演習 I(2025)L21

後者はつねに部分集合で答える. 前者は、有限個の点なら列記, 「解なし」「不定」など、一貫しない答え方が正解とされる伝統芸.

例 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、零行列 O_{22} で表される線形写像 (線形変換).

$f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \mathbb{R}^2 = X$. 「不定」

$f^{-1}(\{(\frac{9}{23})\}) = \mathbb{R}^2 = \emptyset$. (空集合) 「解なし」

逆写像（が存在するとき）

任意の 1 点集合 $\{y\}$ の逆像が必ず 1 点集合 $\{x\} = f^{-1}(\{y\})$ になる稀できれいなケースでは、便利な、逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が定義できる.

定義 (復習: 値域 (range) 線形代数☆演習 I(2025)L12)

定義域の像 $f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subset Y$ を f の値域という.

定義 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection))

f は X から Y の上への写像 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 値域=終域

定義 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection))

f は 1 対 1 の写像 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

定義 (全単射 (bijection))

f が全単射 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f$ が Y の上への 1 対 1 の写像

定義 (逆写像 (inverse map))

$f : X \rightarrow Y$ が全単射のとき,
 Y の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる X の要素がただひとつ定まる.
 $g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \rightarrow X$ を定める.
 g を f の逆写像といい, f^{-1} とかく.

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ f^{-1} : y = f(x) &\mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

変換なら 逆変換, X, Y が $\mathbb{R}$ の部分集合なら 逆関数
 写像・関数の肩の $^{-1}$ は (逆数ではなく) 逆写像・逆関数

L15-Q1

Quiz(逆変換)

- ① $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto 3x$ に逆変換があれば求めよう.
- ② $\mathbb{R}$ の変換 $g : x \mapsto x^2$ に逆変換があれば求めよう.
- ③ $\mathbb{R}$ の変換 $h : x \mapsto e^x$ に逆変換があれば求めよう.

L15-Q2

Quiz(逆変換)

- ① $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto x^3$ に逆変換があれば求めよう.
- ② $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto (x - 2)^3 + 3$ に逆変換があれば求めよう.

逆写像の性質

命題 (逆写像の逆写像)

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

定義 (恒等写像 (恒等変換))

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

$$\text{id}_X : x \mapsto x.$$

命題 ($\mathbb{R}^2$ の恒等変換)

$\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ は線形変換で, 単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される.

命題 (逆写像の性質)

$f : X \rightarrow Y$ が 1 対 1 で上への写像のとき, 逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在し,

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

線形変換の逆変換

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 線形変換, 行列 A で表現,

$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ その逆変換, とする.

逆写像の性質より,

$$f \circ f^{-1} = \text{id}, f^{-1} \circ f = \text{id}.$$

逆変換も線形変換で, 行列 X で表されるなら,

$$AX = E, XA = E.$$

すなわち, $X = A^{-1}$ (逆行列)

実際, 逆行列で表現される変換が逆変換になっている.

命題 (逆変換の表現行列 教科書に追加)

線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を表現する行列を A とする.

f が全単射で逆変換 f^{-1} が存在するとき,

逆変換 f^{-1} を表現する行列は逆行列 A^{-1} である.

逆行列 A^{-1} が存在するなら, 逆変換 $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ が存在する.

$$A^{-1}f(\vec{x}) = A^{-1}A\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x}$$

L15-Q3

Quiz(逆行列の逆行列)

正則行列 A の逆行列 $X = A^{-1}$ の逆行列 $X^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ はもとの行列 A であることを（正則行列の指数法則でなく）逆行列の定義から示そう．

L15-Q4

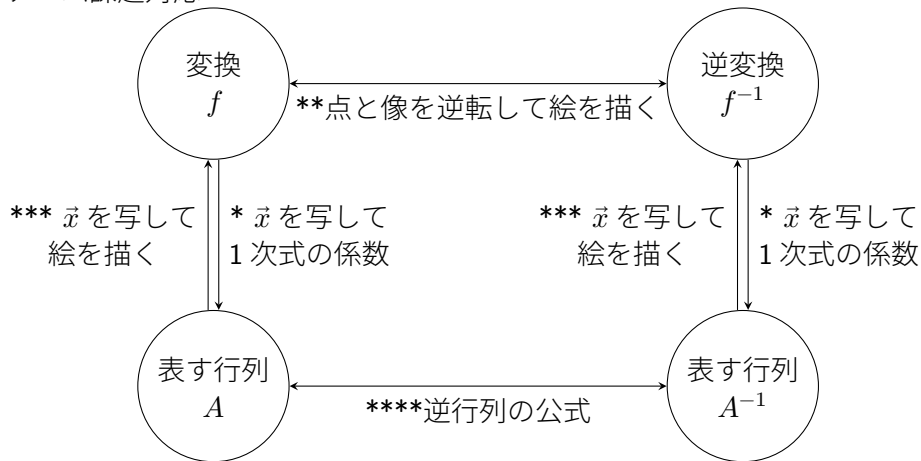
Quiz(線形変換の逆像)

変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ で表される．
逆像 $f^{-1}(\{(\frac{3}{7})\})$ を求めよう．

mobius IH2.5

線形変換の逆変換，それを表す行列を求める方法

チーム課題対応



線形変換の逆変換を求める方法

L15-Q5

TA Prob and Sol: 線形変換の逆変換

$\mathbb{R}^2$ において, y 軸に関する鏡映 f の逆変換 f^{-1} を (日本語で) 求めよう.

略解

***変換 (日本語) から行列** 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して,
(必要なら絵を描いて) 鏡映 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ より, f を表す行列は
 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

******逆行列の公式** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*****行列から変換 (日本語)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. (必要なら絵を描いて) A^{-1} の表すのは「 y 軸に関する鏡映」

****変換から変換 (日本語) に直接**

任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して,

鏡映 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ なので, $f^{-1}(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$-x$ を x' と置き直すと, 任意の $\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}$ に対して,

$f^{-1}(\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x' \\ y \end{pmatrix}$ すなわち, f^{-1} は「 y 軸に関する鏡映」

合成変換の逆変換

写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が全単射であるとき、 $g \circ f$ も全単射.
逆写像 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

命題 (合成写像の逆写像)

$f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が線形変換で、行列 A, B で表されるとき、
合成写像を $g \circ f$ を表す行列は BA .

逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ を表す行列は、 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

回転変換の逆変換

平面の原点を中心とする反時計まわりの角 θ の回転変換 $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を表すのは,

回転行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} +\cos \theta & -\sin \theta \\ +\sin \theta & +\cos \theta \end{pmatrix}$.

その逆変換を表す行列は, 逆行列

$$R_\theta^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta - (-\sin \theta) \sin \theta} \begin{pmatrix} +\cos \theta & -(-\sin \theta) \\ -\sin \theta & +\cos \theta \end{pmatrix} = R_{-\theta}.$$

L15-Q6

Quiz(合成変換の逆変換)

平面の線形変換で、まず原点中心の $\pi/3$ の回転、次に y 軸に関する鏡映を行う合成変換を考える．この合成変換の逆変換を表す行列を求めよう．

3次元の回転行列とオイラー角

2次元の回転行列は1パラメタ θ で R_θ .

3次元の任意の回転は, 3パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).

オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.

3次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

<http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html>