

4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L16(2025-06-04 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-04 Wed 08:18 JST hig"

今日の目標

- 行列式の定義を説明できる 石村畑 線形代数 §3.2
- 4 次以上の行列式を余因子展開で計算できる
- 対角行列, 上下三角行列の行列式を計算できる

石村畑 線形代数 §3.2

教科書に追加



L15-Q1

Quiz 解答: 逆変換

- ① 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{3}x$.
- ② g は全射でも単射でもないので, g^{-1} は存在しない.
- ③ h は全射ではない (単射ではある) ので, h^{-1} は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

L15-Q2

Quiz 解答: 逆変換

- ① 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

2

$$y = (x - 2)^3 + 3$$

$$(x - 2)^3 = y - 3$$

$$x - 2 = \sqrt[3]{y - 3}$$

$$x = \sqrt[3]{y - 3} + 2$$

$$\text{よって, } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 3} + 2 = \begin{cases} (-(x - 3))^{1/3} + 2 & (x < 3) \\ (x - 3)^{1/3} + 2 & (x \geq 3) \end{cases}$$

L15-Q3

Quiz 解答: 逆行列の逆行列

X は A の逆行列なので, 定義より, $AX = XA = E$. 逆行列の定義より, A は X の逆行列.

L15-Q4

Quiz 解答: 線形変換の逆像

A は正則なので逆変換 $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在し, 逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ で表される.}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

よって, 逆像 $f^{-1}(\{(\frac{3}{7})\}) = \{(\frac{3/2}{1/2})\}$.

L15-Q5 略

L15-Q6

Quiz 解答: 合成変換の逆変換

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix}^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos -\pi/3 & -\sin -\pi/3 \\ \sin -\pi/3 & \cos -\pi/3 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開

- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

余因子

定義 (小行列式と余因子)

石村畑 線形代数 p.60

A : n 次の正方行列 のとき,

A の (i, j) **小行列式 (minor)** $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, A から第 i 行, 第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.

A の (i, j) **余因子 (adjugate)** $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

(i, j) 小行列式にかけられる符号 $= (i, j)$ 余因子に含まれる符号

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列 (行列式でなく) をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} = \quad , \quad \begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} = \quad .$$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}.$$

定義 (行列式 石村畑 線形代数 p.64)

n 次の行列式を、次で帰納的に定める.

- $n = 1$ 次正方行列 (a) の行列式を $\det((a)) = a$ と定める.
- n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式を、余因子 ($=n-1$ 次の行列の行列式) を用いて、 $j = 1$ 列に対して、次のように定める.

$$\det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} \tilde{a}_{\ell j}$$

$$\begin{aligned} n \text{ 次行列式} &= \text{成分} \times (n-1 \text{ 次行列式}) + \dots \\ \text{体積} &= \text{高さ} \times \text{面積} \end{aligned}$$

実は $2 \leq j \leq n$ や、行でも同値な定義になっている $\leadsto$ 余因子展開
帰納的定義 (inductive) 元, 集合の定義を、ひとつ前の定義に帰着させる.
再帰的定義 (recursive) もほぼ同じ意味

プログラミング実習

例

すでにした 2,3 次の定義と矛盾しない. n 次の行列式は $n!$ 項からなる (数学的帰納法).

L16-Q1

Quiz(4 次の行列式の余因子展開)

行列を考える. $B = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ を考える.

- ① B の行列式を, 定義にしたがって計算しよう.
- ② B の行列式を, 第 1 列に関して余因子展開しよう.
- ③ B の行列式を, 第 4 行に関して余因子展開しよう.

ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開

- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なものの複数の和として書くこと

定理 (余因子展開 石村畑 線形代数 p.65)

$A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列
 $\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子 とするとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \tilde{a}_{i\ell}. \quad (i \text{ 行目における余因子展開})$
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} \tilde{a}_{\ell j}. \quad (j \text{ 列目における余因子展開})$

(i, j) 小行列式にかけられる符号 $= (i, j)$ 余因子に含まれる符号 $= \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. n 項の和になる.

第 3 行についての展開 ($\cdot$, $\bullet$ はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ \color{blue}{31} & \color{red}{32} & \color{blue}{33} & \color{red}{34} \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +\color{blue}{31} \begin{vmatrix} \cdot & 12 & 13 & 14 \\ \cdot & 22 & 23 & 24 \\ \cdot & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - \color{red}{32} \begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ 31 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} + \color{blue}{33} \begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdot & 14 \\ 21 & 22 & \cdot & 24 \\ 31 & 32 & \cdot & 44 \end{vmatrix} - \color{red}{34} \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdot \\ 21 & 22 & 23 & \cdot \\ 31 & 32 & 43 & \cdot \end{vmatrix}.$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & \color{red}{12} & 13 & 14 \\ 21 & \color{blue}{22} & 23 & 24 \\ 31 & \color{red}{32} & 33 & 34 \\ 41 & \color{blue}{42} & 43 & 44 \end{vmatrix} = -\color{red}{12} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} + \color{blue}{22} \begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} - \color{red}{32} \begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 41 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} + \color{blue}{42} \begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ 31 & \cdot & 33 & 34 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

石村畑 線形代数 問題 15-18

mobius IH3.2

ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開

- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

定義 (上三角行列・下三角行列 石村畑 線形代数 p.50)

n 次正方行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とする.

- A が **上三角行列** (upper triangular matrix) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
 $(\forall i, j \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
「対角成分の右上以外はゼロ」
- A が **下三角行列** (lower triangular matrix) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall i, j \quad i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
「対角成分の左下以外はゼロ」

命題 (対角行列と三角行列 教科書に追加)

- 正方零行列, 単位行列は対角行列である.
- A は対角行列 $\Leftrightarrow A$ は上三角行列, かつ下三角行列.

命題 (上三角・下三角行列の行列式の値 教科書に追加)

上三角行列・下三角行列の行列式は、対角成分の積である

上三角行列のみ示す．行列の次数 n に関する数学的帰納法による．

- ① $n = 1$ 次の上三角行列 $U_1 = (d)$ に対して、 $\det(U_1) = d$ より成立．
- ② $n = k$ 次の上三角行列に対して成立するとする．

$$n = k + 1 \text{ 次の上三角行列の行列式 } \det(U_{k+1}) = \det \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ & d_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_{k+1} \end{pmatrix}$$

(空白の成分はゼロ) を第 1 列で展開すると、
 $\det(U_{k+1}) = d_1 \times \det U_k = d_1 \times \det \begin{pmatrix} d_2 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{k+1} \end{pmatrix}$ と、 k 次の上三角行列 U_k の行列式が現れる．

帰納法の仮定により、 k 次の上三角行列 U_k の行列式は、 $d_2 \dots d_{k+1}$ ．
 よって、 $\det(U_{k+1}) = d_1 \dots d_{k+1}$ ． $n = k + 1$ のときも成立する．

一般に成立する．

L16-Q2

Quiz(行列式の余因子展開と三角行列の行列式)

次の行列式の値を求めよう.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & 2 & 23 & 25 & 21 \\ b & 3 & 17 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$