

行列式の性質 1

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L17(2025-06-06 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-06 Fri 11:07 JST hig"

今日の目標

- 行列式の行, 列多重線形性, 行, 列交代性を説明できる 石村畑 線形代数 §3.3
- 性質 R1–R5, C1–C5 石村畑 線形代数 pp.80,81 を使って行列式を簡単化できる



L16-Q1

Quiz 解答:4 次の行列式の余因子展開

- ① $\det B = 21 \begin{vmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \dots = -3893.$
- ② 上の答の最初の等号まで.
- ③ $\det B = -13 \begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \end{vmatrix} + 0 - 0 + 17 \begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 \\ 2 & 31 & 3 \\ 7 & 37 & 9 \end{vmatrix}.$

L16-Q2

Quiz 解答: 行列式の余因子展開と三角行列の行列式

第1列で余因子展開して,

$$\det A = a(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 17 & 15 & 45 \\ 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} + b(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 23 & 25 & 21 \\ 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11a - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11b.$$

転置行列

定義 (転置行列) 石村畑 線形代数 §4.1(p.100)

m 行 n 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して, n 行 m 列の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を A の転置行列 (transposed matrix) といい, ${}^tA$ と書く.

A の t 乗 $A^t (t \in \mathbb{Z})$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.

例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$${}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \ -1 \ 2), \quad {}^t(3 \ -1 \ 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

転置行列の性質

定理 (転置行列の性質)

A, B を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$${}^t({}^tA) = A,$$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$$

$${}^t(kA) = k {}^tA, \quad \text{以上まああたり前}$$

$$|{}^tA| = |A|,$$

石村畑 線形代数 定理 4.1.2(p.100)

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

石村畑 線形代数 定理 4.1.1(p.100) 超重要

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

命題

行列式の行 (R=row) に対する性質は, 行列式の列 (C=column) に対しても成立する.

行列式の性質

行について R1-5 石村畑 線形代数 p.80, $\textcircled{i}$ は行番号.

列について C1-5 石村畑 線形代数 p.81, $\textcircled{i}'$ は列番号.

定理 (R1,R2: 行列式の行 (多重) 線形性 石村畑 線形代数 定理 3.3.1)

$a_1, \dots, a_n, b_i$: 1 行 n 列の行ベクトル

$$\forall i \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}, \quad (\text{R1})$$

$$\forall i \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}. \quad (\text{R2: } \textcircled{i} \times \frac{1}{k})$$

R1 の例

$$\begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

両辺どちらで考えても $ad - bc$.

R2 の例

$$|kE| = \begin{vmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix} = \dots = k^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

両辺どちらで考えても k^n .

C1, C2 の例

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b \\ c & \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{3}b \\ c & \frac{1}{3}d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \frac{2}{3}b \\ c & \frac{2}{3}d \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

両辺どちらで考えても $ad - bc$.

和とスカラー倍は、行列と行列式で、別の話をしている！
 行列式 $|\bullet|$ は行ごと、行列 $(\bullet)$ は全成分． 比較しよう．

● 行列の和 石村畑 線形代数 p.32

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

● 行列のスカラー倍 石村畑 線形代数 p.32

$$\begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

線形性 (linearity)

定義 (線形性)

写像 f が線形性を持つとは、次の性質をみたすこと.

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ka) = kf(a)$$

(定数項なしの)1 次関数はこの性質を満たす. 2 次関数は満たさない.
「行列式は、多重線形性を持つ」

多重=1 行 ... n 行

1 次の=線形の=linear

2 次の=quadratic

3 次の=cubic

R1 の証明

$\det C = \det A + \det B$ とかく .

$n = 1$ 成立

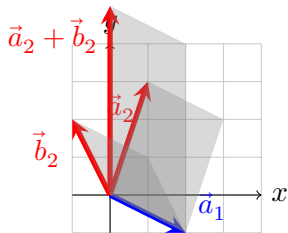
$n \geq 2$ のとき, i 行について余因子展開して,

$$\begin{aligned}\det C &= (a_{i1} + b_{i1})\tilde{c}_{i1} + \cdots + (a_{in} + b_{in})\tilde{c}_{in} \\ &= (a_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{c}_{in}) + (b_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + b_{in}\tilde{c}_{in}).\end{aligned}$$

違いのある部分を除いた余因子は, $\tilde{c}_{ij} = \tilde{a}_{ij} = \tilde{b}_{ij}$. よって,

$$\begin{aligned}\det C &= (a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}) + (b_{i1}\tilde{b}_{i1} + \cdots + b_{in}\tilde{b}_{in}) \\ &= \det A + \det B.\end{aligned}$$

C1 列多重線形性の直観的説明


 $k =$

$$\begin{aligned}
 10 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & +2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & +2 \end{vmatrix} \\
 &= 7 + 3
 \end{aligned}$$

1

R2 の証明

$\det C = k \det A$ とかく.

$n = 1$ のとき成立.

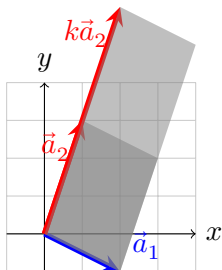
$n \geq 2$ のとき, i 行について余因子展開して,

$$\det C = (ka_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + ka_{in}\tilde{c}_{in}) = k(a_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{c}_{in}).$$

違いのある部分を除いた余因子は, $\tilde{c}_{ij} = \tilde{a}_{ij}$.

$$\det C = k(a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}) = k \det A.$$

C2 列多重線形性の直観的説明 $\det(\vec{a}_1 \ k\vec{a}_2) = k \det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$



$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \cdot k \\ -1 & 3 \cdot k \end{vmatrix} \\ &= k \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= k \times 7 \end{aligned}$$

$$R3': \textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{i+1}$$

定理 (R3': 行列式の行交代性) 石村畑 線形代数 定理 3.3.2

$a_1, \dots, a_n$: 1 行 n 列の行ベクトル

$$\forall 1 \leq i < n \quad \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \vdots \\ \hline a_i \\ \hline a_{i+1} \\ \hline \vdots \\ a_n \\ \hline \end{array} = (-1) \times \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \vdots \\ \hline a_{i+1} \\ \hline a_i \\ \hline \vdots \\ a_n \\ \hline \end{array}$$

交代=入れ替えると (-1) 倍になる, 反対称.

R3' の証明

$\det A = -\det B$ とかく.

$\det A$ の i 行目の余因子展開, $\det B$ の $i+1$ 行目の余因子展開の違いは符号だけ.

例 $n=3, i=2, i+1=3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = -21 \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 32 & 33 \end{vmatrix} + 22 \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} - 23 \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 31 & 32 & 33 \\ 21 & 22 & 23 \end{vmatrix} = +21 \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 32 & 33 \end{vmatrix} - 22 \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} + 23 \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}.$$

R3: $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$

系 (R3: 行列式の行交代性) 石村畑 線形代数 系 3.3.3

 $a_1, \dots, a_n$: 1 行 n 列の行ベクトル

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

「系」 Corollary とは、定理から簡単に導ける結果のこと

R3 の証明 (i, j) の入替には、必ず $2(j-i)-1$ 回 (奇数回) の $(i, i+1)$ 入替が必要. $(-1)^{2(j-i)-1} = -1$.

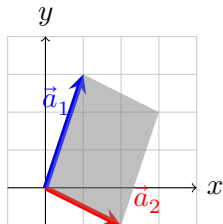
R3 の例

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{R3}{=} (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{R3, R3}{=} (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

C3 列交代性 $\vec{a}_1 \leftrightarrow \vec{a}_2$ の直観的説明

$$\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_2 \ \vec{a}_1)$$



裏返し

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

系 (R4: 行列式の重複行)

石村畑 線形代数 系 3.3.4

 $a_1, \dots, a_n, c$: 1 行 n 列の行ベクトル

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ c \quad (i) \\ \vdots \\ c \quad (j) \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = 0$$

R4 の例

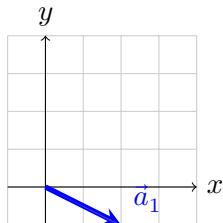
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 95 & 96 & 97 & 98 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 55 & 56 & 57 & 58 \end{vmatrix} \stackrel{\text{R4} \textcircled{1}, \textcircled{3}}{=} 0$$

R4 の証明 R3: $(i) \leftrightarrow (j)$ で行列 C は変わらない.

$$\det C = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ \vdots & & \\ c & (i) & \\ \vdots & & \\ c & (j) & \\ \vdots & & \\ a_n & & \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_1 & & \\ \vdots & & \\ c & (i) & \\ \vdots & & \\ c & (j) & \\ \vdots & & \\ a_n & & \end{vmatrix}.$$

移項すると, $2 \times \det C = 0$.

C4 の直観的説明 $\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_1) = 0$



$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{R5: } \textcircled{i} + \textcircled{j} \times k$$

定理 (R5: 行列式の不変性) 石村畑 線形代数 定理 3.3.5

$a_1, \dots, a_n$: 1 行 n 列の行ベクトル, $k \in \mathbb{R}$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n$$

a_1	$\vdots$	a_i	$\vdots$	$=$	a_1	$\vdots$	$a_i + ka_j$	$\vdots$	a_j	$\vdots$	a_n
$\vdots$	a_j	$\vdots$	a_n		$\vdots$	a_j	$\vdots$	a_n		$\vdots$	a_n

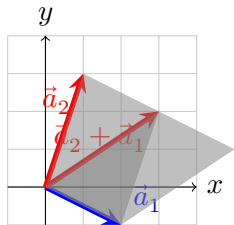
R5 の証明

$$\begin{array}{c}
 \text{右辺} \stackrel{R1, R2}{=} \left| \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right| + k \left| \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right| \stackrel{R4}{=} \text{左辺} + k \cdot 0
 \end{array}$$

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{R2: \textcircled{1} \times \frac{1}{2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{R5: \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-7)}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -12 & -9 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-12) \cdot 3 \cdot 5.$$

C5 の直観的説明 $\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \det(\vec{a}_1 \ k\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 2 & 1+ & 1 \cdot 2 \\ -1 & 3+ & 1 \cdot (-1) \end{vmatrix} = 7$$