

行列式の性質 2

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L18(2025-06-11 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-11 Wed 14:10 JST hig"

今日の目標

- 行列の積，逆行列の行列式を求められる 石村畑 線形代数 §3.3
- 行列の積，逆行列の転置を求められる 石村畑 線形代数 §4.1



ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2

- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

積の行列式

L18-Q1

Quiz(線形変換の合成と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 f, g が, それぞれ行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される.

- ① 合成変換 $f \circ g$ の面積拡大率を求めよう. 表向き? 裏向き?
- ② 合成変換 $g \circ f$ の面積拡大率を求めよう. 表向き? 裏向き?

定理 (行列の積の行列式 石村畑 線形代数 定理 3.3.6(p.90))

A, B : n 次正方行列

$$|AB| = |A| |B| = |B| |A| = |BA|.$$

「行列の積の行列式は、行列式の積」 mobius IS3.4

証明 略. (この定義だと) 超たいへん.

命題

A, B が n 次正方行列, $k \in \mathbb{R}$ のとき,

- $|A + B|$ は一般には簡単化できない.
- $|kA| = k^n |A|$.

逆行列の行列式

Quiz(線形変換の逆変換と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 f が、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される.
 f, f^{-1} の面積拡大率を求めよう. 表向き? 裏向き?

補題 (単位行列の行列式)

$$\det(E) = 1.$$

Lemma=補題=補助定理とは、美しくはないけど、本題の定理を証明するための準備として証明する必要のある主張のこと.

定理 (逆行列の行列式 石村畑 線形代数 定理 4.1.4(p.103) の半分)

A が正則行列ならば、

$$\det(A) \neq 0.$$

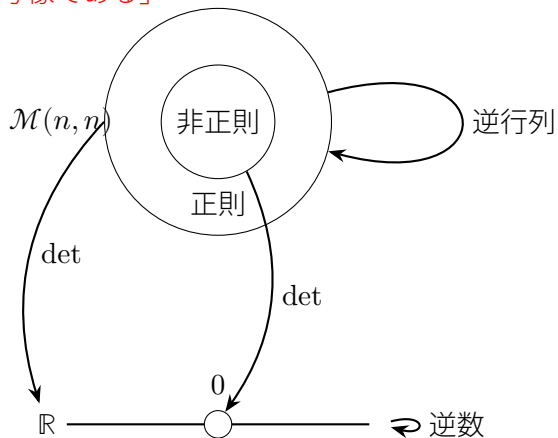
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

(正則なら) 逆行列の行列式は、行列式の逆数

(対偶: $\det A = 0$ ならば、 A は正則でない)

証明

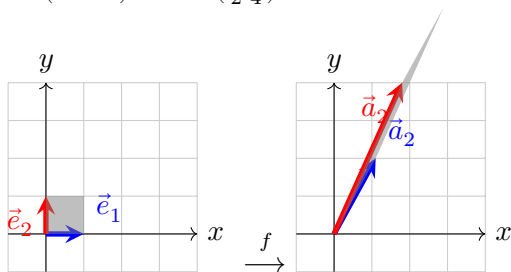
「 $\det$ は, n 次の正則行列全体の乗法群から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への全射群準同型写像である」



$\det(A) = 0$ なら正則でないことの直観的意味

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = 0$, 面積拡大率=0.



実は、定義域 $X = \mathbb{R}^2$ のすべての点が、 f で直線 $\{(\frac{1}{2})t \mid t \in \mathbb{R}\}$ に写っている． f は全射でない．よって、 f の逆変換は存在しない．例えば、 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $\vec{x}$ は存在しない．

正則で逆行列 A^{-1} があるなら、逆変換 $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ があるはず．

問「 A が正則なら $\det A \neq 0$ 」の逆「 $\det A \neq 0$ なら正則」は成立する？

答 Yes. 「行列式で正則判定できる」

次回

L18-Q2

Quiz(積と逆の行列式)

A, B を正則行列とする. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- ① $(AB)^{-1}, (BA)^{-1}$ を求めよう.
- ② $\det((AB)^{-1}), \det((BA)^{-1})$ を求めよう.
- ③ $\det(A), \det(B)$ を求めよう.
- ④ $\det(AB), \det(BA)$ を求めよう.
- ⑤ $\det(A^n)$ を求めよう.

ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2

- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

転置行列

定義 (転置行列 石村畑 線形代数 §4.1(p.100))

m 行 n 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して, n 行 m 列の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を A の転置行列 (transposed matrix) といい, ${}^tA$ と書く.

A の t 乗 $A^t (t \in \mathbb{Z})$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.
 A の成分を a_{ij} , $B = {}^tA$ の成分を b_{ij} とすると, $a_{ij} = b_{ji}$.

例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$${}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \ -1 \ 2), \quad {}^t(3 \ -1 \ 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$${}^tC = {}^t \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, c_{12} = b = d_{21}.$$

転置行列の性質

定理 (転置行列の性質)

A, B を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$${}^t({}^tA) = A,$$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$$

$${}^t(kA) = k {}^tA, \quad \text{以上まああたり前}$$

$$|{}^tA| = |A|,$$

石村畑 線形代数 定理 4.1.2(p.100)

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

石村畑 線形代数 定理 4.1.1(p.100) 超重要

(*)

(*) の証明 A の成分を a_{ik} , B の成分を b_{kj} , ${}^tA$ の成分を c_{ik} , ${}^tB$ の成分を d_{kj} と書くと, $a_{ik} = c_{ki}$, $b_{kj} = d_{jk}$.

AB の (i, j) 成分は $\sum_{\ell} a_{i\ell} b_{\ell j}$.

${}^t(AB)$ の (i, j) 成分は $\sum_{\ell} a_{j\ell} b_{\ell i} = \sum_{\ell} d_{j\ell} c_{\ell i}$. これは, ${}^tB {}^tA$ の (i, j) 成分. よって, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

命題 (逆行列の転置)

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

証明

L18-Q3

Quiz(行列式の性質を使った計算)

A, B を n 次正則行列, E を n 次単位行列とする.

$\det(A) = p, \det(B) = q, \det(A + E) = r, \det(B + E) = s, \det(A + B) = t$ とする.

① 次の行列式を p, q, r, s, t, n で表そう.

① $\det({}^tA)^{-2}$.

② $\det(A^5 + A^4)$.

③ $\det(2E)$.

④ $\det(3 {}^tABA^{-1}B^2)$

② 行列の式 $A^2(A + B)A^{-2}$ を展開して簡単化しよう.

③ 行列式 $\det(A^2(A + B)A^{-2})$ を p, q, r, s, t, n で表そう (展開しないほうがいいのかも)

④ 行列の式 $2B^{-1}(BA + A)B$ を展開して簡単化しよう.

⑤ 行列式 $\det(2B^{-1}(BA + A)B)$ を p, q, r, s, t, n で表そう (展開しないほうがいいのかも)

ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2

- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

行列式がゼロになるとき

教科書に追加

すでにわかっていること

命題

A を n 次正方行列とする.

R4 A の第 i 行と第 j 行 ($i \neq j$) が等しいなら, $|A| = 0$

C4 A の第 i 列と第 j 列 ($i \neq j$) が等しいなら, $|A| = 0$.

- A が上下三角行列で, 対角成分に zero のものがあれば, $|A| = 0$.
-
- A が正則なら, $|A| \neq 0$.
- $|A| = 0$ なら, A は正則でない, すなわち A^{-1} は存在しない.
- 疑問: A が正則でないなら, $|A| = 0$?
- 疑問: $|A| \neq 0$ なら, A は正則?

$|A| = 0$ のとき, 行列が表す線形変換の面積拡大率はゼロ, つぶれる.

命題

A を n 次正方行列とする.

- A に, すべて 0 である行があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 行が, 第 j 行 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら, $|A| = 0$
- A の第 k 行が, 第 i 行と第 j 行を加えたものなら, $|A| = 0$
- A に, すべて 0 である列があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 列が, 第 j 列 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら, $|A| = 0$
- A の第 k 列が, 第 i 列と第 j 列を加えたものなら, $|A| = 0$

他にも, $R_{2,4,5}$, $C_{2,4,5}$ で, $|A| = 0$ とわかるケースがある.

ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2

- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

変数を含む行列式

石村畑 線形代数 §3.4

L18-Q4

Quiz(2 次正方行列の特性多項式)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して, $|xE - A| = 0$ を満たす x を求めよう.

このとき, 行列式は x の 2 次多項式.

L18-Q5

Quiz(3 次正方行列の特性多項式)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $|xE - A| = 0$ を満たす x を求めよう.