

逆行列の公式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L19(2025-06-13 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-13 Fri 07:22 JST hig"

今日の目標

- 余因子行列から逆行列を求められる 石村畑 線形代数 §4.1
- 正則と $\det A \neq 0$ の同値性を説明できる 石村畑 線形代数 §4.1
- 逆行列を用いて連立 1 次方程式を解ける 石村畑 線形代数 §4.2



L18-Q1

Quiz 解答: 線形変換の合成と行列式

- ① $f \circ g$ は $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ で表される. $|AB| = 12$ より, 12 倍, 表向き.
 別解 最初に施される g は, $|B| = -3$ より, 3 倍, 裏向きに写す. 次に施される f は, $|A| = -4$ より, 4 倍, 裏向きに写す. これらの合成なので, $3 \cdot 4$ 倍, 表向きに写す.
- ② $g \circ f$ は $BA = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ で表される. $|BA| = 12$ より 12 倍, 表向き.

Quiz(線形変換の逆変換と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 f が, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される.
 f, f^{-1} の面積拡大率を求めよう. 表向き? 裏向き?

L18-Q2

Quiz 解答: 積と逆の行列式

- ① $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \neq (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}.$
- ② $\det((AB)^{-1}) = \det(B^{-1}A^{-1}) = \det(B^{-1})\det(A^{-1}) = (-5) \cdot (-2) = 10 = \det((BA)^{-1}).$
- ③ $\det(A) = \det((A^{-1})^{-1}) = (\det(A^{-1}))^{-1} = \frac{1}{-2}.$
 $\det(B) = \det((B^{-1})^{-1}) = (\det(B^{-1}))^{-1} = \frac{1}{-5}.$
- ④ $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \frac{1}{10} = \det(BA).$
 または, $\det(AB) = \det(((AB)^{-1})^{-1}) = (\det((AB)^{-1}))^{-1} = \frac{1}{10}.$
- ⑤ $n = 2$ 次正方行列なので,
 $\det(3A^k) = 3^n \det(A^k) = 3^2(\det(A))^k = 3^2(-2)^k.$

emark -1 は逆行列, -1 は実数の逆数, k は行列の k 乗, k は実数の k 乗.

Q3 以降略

行列式がゼロになるとき

教科書に追加

すでにわかっていること

命題

A を n 次正方行列とする.

R4 A の第 i 行と第 j 行 ($i \neq j$) が等しいなら, $|A| = 0$

C4 A の第 i 列と第 j 列 ($i \neq j$) が等しいなら, $|A| = 0$.

- A が上下三角行列で, 対角成分に zero のものがあれば, $|A| = 0$.
-
- A が正則なら, $|A| \neq 0$.
- $|A| = 0$ なら, A は正則でない, すなわち A^{-1} は存在しない.
- 疑問: A が正則でないなら, $|A| = 0$?
- 疑問: $|A| \neq 0$ なら, A は正則?

$|A| = 0$ のとき, 行列が表す線形変換の面積拡大率はゼロ, つぶれる.

命題

A を n 次正方行列とする.

- A に, すべて 0 である行があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 行が, 第 j 行 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら, $|A| = 0$
- A に, すべて 0 である列があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 列が, 第 j 列 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら, $|A| = 0$

そのような行, 列は, R5, C5 で作り出せる (作りだそう).
他にも, R2,4,5, C2,4,5 で, $|A| = 0$ とわかるケースがある.
mobius IH3.3

ここまで来たよ

18 行列式の性質 2

19 逆行列の公式

- 逆行列の公式
- 連立 1 次方程式と逆行列

余因子行列

復習

線形代数☆演習 I(2025)L16

定義 (小行列式と余因子)

石村畑 線形代数 p.60

A : n 次の正方行列 のとき,

A の (i, j) **小行列式 (minor)** $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, A から第 i 行, 第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.

A の (i, j) **余因子 (adjugate)** $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

定義 (余因子行列) 石村畑 線形代数 p.101

A を n 次正方行列, (i, j) 成分を a_{ij} , 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とする.

A の余因子行列 $\tilde{A}$ を, (i, j) 成分が $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ であるような n 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べて, その後で転置したもの.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

mobius IH4.1

補題 (余因子展開 (行列形))

石村畑 線形代数 補助定理 4.1.3

A を n 次の正方行列, $\tilde{A}$ を A の余因子行列とすると,

$$|A|E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 次のスライドから.

定理 (行列の正則条件と逆行列公式)

石村畑 線形代数 定理 4.1.4

A を n 次正方行列, $\tilde{A}$ を余因子行列とする.

- ① A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$.
- ② A が正則のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

すでに, 「 A が正則 $\Rightarrow |A| \neq 0$ 」 は示していた.

逆に, $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ が正則, なぜなら, $\frac{1}{|A|}\tilde{A}$ が現に逆行列になっている. 計算量が多いので数値問題での使用を避ける. もっと実用的な方法あり.

補題を，成分で書き直したのがこれ．

命題 (余因子展開 (成分))

A を n 次の正方行列， a_{ij} を A の (i, j) 成分， $\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子とすると，

- $\forall i, k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}. \quad (i \text{ 行目における余因子展開})$
- $\forall j, k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}. \quad (j \text{ 列目における余因子展開})$

証明

$i = k$ のとき $\delta_{ik} = 1$. ふつうの余因子展開であり成立.

$i \neq k$ のとき

A で, k 行目に, i 行目を上書きコピーした行列を B とする.

実は 左辺 $= 0 = \det(B) =$ 右辺.

左辺 $= 0 = \det(B)$

$i \neq k$ と交代性より $\det(B) =$ 左辺.

$\det(B) =$ 右辺

$\det(B)$ の k 行目に関する余因子展開は $\det(B) = \sum_{\ell=1}^n b_{k\ell} \tilde{b}_{k\ell}$.

コピーの結果 $b_{k\ell} = a_{i\ell}$,

余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ は, $i \neq k$ より, コピーされた部分をはずしてるので,

$\tilde{b}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}$.

よって $\det(B)$ の余因子展開は右辺と一致する.

よって, $i \neq k$ のときは

$$\det(A)\delta_{ik} = \det(B) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \tilde{a}_{k\ell}.$$

$$0 = \det(B) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \tilde{a}_{k\ell}.$$

$i \neq k$ の場合の証明の実演

A の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして B を作成.

B を $k = 2$ 行で展開.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \\ 0 = \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ \color{red}{41} & \color{red}{42} & \color{red}{43} & \color{red}{44} \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \\ &= \color{red}{41}\tilde{a}_{21} + \color{red}{42}\tilde{a}_{22} + \color{red}{43}\tilde{a}_{23} + \color{red}{44}\tilde{a}_{24} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}. \end{aligned}$$

逆行列公式をあえて使ってみた例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} =$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}, B^{-1} =$$

ここまで来たよ

18 行列式の性質 2

19 逆行列の公式

- 逆行列の公式
- 連立 1 次方程式と逆行列

連立 1 次方程式の行列による表現

石村畑 線形代数 p.106,p.134

行列の意味

$$\boxed{m \text{ 行 } n \text{ 列の行列}} \leftrightarrow \boxed{\text{線形写像 } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m} \leftrightarrow \boxed{n \text{ 元 } m \text{ 連立 1 次方程式}}$$

連立 1 次方程式で、

- 変数（未知数）が n 個（「 n 元」） $x_1, \dots, x_n$
- 等式が m 個（「 m 連立」）

のものを考える。

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array}$$

これを，次の形に書く．

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{係数行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル } X = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ 定数ベクトル } B = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(石村畑 線形代数 §4 では， $\vec{x}, \vec{b}$ を m 行 1 列の行列とみなして， X, B と書いている．ここでは縦（列）ベクトルとみなす．ベクトルは行列の一種だから別にいいでしょ．mobius では縦ベクトルとして入力して．)

A と $\vec{b}$ を連結した行列 $B = (A|\vec{b})$ を **拡大係数行列** という．

石村畑 線形代数 p.134

L19-Q1

Quiz(連立 1 次方程式の行列による表示)

未知数 $x_1, \dots, x_5$ についての次の連立 1 次方程式を, 係数行列, 未知数ベクトル, 定数ベクトルで書かれた, 同値な, 行列の 1 つの等式に書き直そう. 拡大係数行列を求めよう.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 20, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_5 = 40, \\ -2x_1 + 3x_2 = 60. \end{cases}$$

mobius IH4.1

逆行列と連立 1 次方程式

石村畑 線形代数 §4.2

命題 (逆行列を利用した連立 1 次方程式の解)

未知数の個数 n と、等式の個数 m が一致した n 元連立 1 次方程式を

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形に書くと、 A は n 次正方行列になる。

A が**正則**行列であるとき、 n 元連立 1 次方程式の解は次で与えられる。

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

証明 正則なので A^{-1} が存在する。方程式の左から A^{-1} をかける。

係数行列が正則のとき、解は唯一 (unique に) 存在する。解なしや不定はない。

L19-Q2

Quiz(逆行列と連立 1 次方程式)

正則行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で書かれた次の連立 1 次方程式を解こう．ただし，

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であることを確かめた上で使ってよい．

① $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

② $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

③ $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

④ $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

mobius IH4.1