

掃き出し法（正則行列）

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L20(2025-06-18 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-18 Wed 07:12 JST hig"

今日の目標

- 行基本操作と行基本変形を説明できる 石村畑 線形代数 p.114
- 行基本変形で単純な連立 1 次方程式を解ける
- 行列式の計算と行基本変形との区別を説明できる

石村畑 線形代数 p.112

石村畑 線形代数 p.114



L19-Q1

Quiz 解答: 連立 1 次方程式の行列による表示

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

この係数行列は正方行列でなく、したがって正則でない。
 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 40 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

L19-Q2

Quiz 解答: 逆行列と連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \\ \textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}. \\ \textcircled{3} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \textcircled{4} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a+b-c \\ \frac{2}{3}a-b+c \\ -\frac{2}{3}a+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここまで来たよ

19 逆行列の公式

20 掃き出し法（正則行列）

- 行基本操作・行基本変形
- 行基本変形による連立 1 次方程式の解法（正則）

復習：連立 1 次方程式を行列で書く

石村畑 線形代数 p.106

変数 $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{係数行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ 定数ベクトル } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

拡大係数行列 $(A|\vec{b})$.

連立 1 次方程式の解法

- 「系統的な」解法 (= 拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
 - ▶ その解法は必ず解を出力するのか?
 - ▶ 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 (m 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

行基本操作と行基本変形

石村畑 線形代数 §4.3

連立 1 次方程式の, 拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を考える.

行列に次の操作をしても, 連立 1 次方程式は同値 (解が変わらない).

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

石村畑 線形代数 p.114

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ は拡大係数行列の行番号. $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots$

RI $\textcircled{i} \times (\text{定数 } k), (k \neq 0)$

RII $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times (\text{定数 } k), (i \neq j)$

RIII $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}, (i \neq j)$

mobius IH4.3

RI は行列式の計算 石村畑 線形代数 p.80 での R2 に, RII は R5 に, RIII は R3 に似ているが同じではない.

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

行基本操作の可逆性

変形前後の連立 1 次方程式が同値であることは、行基本操作は、別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せることから言える。

RI) $\textcircled{i} \times (\text{定数 } k), (k \neq 0)$ の逆操作は…

RII) $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times (\text{定数 } k), (i \neq j)$ の逆操作は…

RIII) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}, (i \neq j)$ の逆操作は…

基本操作の $\rightarrow$ は、集合の等号

$(A_1 | \vec{b}_1) \xrightarrow{R^*} (A_2 | \vec{b}_2)$ ならば、

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A_1 \vec{x} = \vec{b}_1\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A_2 \vec{x} = \vec{b}_2\} \subset \mathbb{R}^n.$$

行列式の計算の $=$ は、実数の等号

$$|A_1| \stackrel{R^*}{=} |A_2| \in \mathbb{R}$$

ここまで来たよ

19 逆行列の公式

20 掃き出し法（正則行列）

- 行基本操作・行基本変形
- 行基本変形による連立 1 次方程式の解法（正則）

L20-Q1

Quiz(連立 1 次方程式)

- ① 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x_1+4x_2=16, \\ 4x_1+5x_2=23, \end{cases}$ を, 係数行列 A , 未知数ベクトル $\vec{x}$, 定数ベクトル $\vec{b}$ で書き直そう.
- ② 上の連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$ の形に 行基本変形しよう. 1 回の基本操作では RI, RII, RIII のいずれかを 1 個だけ使い $\begin{pmatrix} \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-3) \end{pmatrix}$ のような記号を記すこと), 横方向に $\begin{pmatrix} \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2} \end{pmatrix}$ のように矢印でつないで記述する.
- ③ $\begin{matrix} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta \end{matrix}$ が上の連立 1 次方程式を満たすことを確かめよう.
- ④ 係数行列の行列式 $\det A$ を, R1-R5 を使って $k \times \left| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right|$ の形に持って行って値 k を求めよう. 1 回に R1-R5 のいずれかを 1 個だけ使い $\begin{pmatrix} \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-3) \\ = \end{pmatrix}$ のような記号を記すこと), 横方向に $\begin{pmatrix} \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2} \end{pmatrix}$ のように等号で結んで計算する.

掃き出し法 (2 次正則行列)

掃き出し法 $\simeq$ Gauss の消去法 (Gaussian elimination) 2 次正則行列を必ず単位行列に基本変形できる手順

掃き出し法 (2 次正則行列)

- ① (1, 1) 成分を, そのまま, または RIII で, ゼロ以外の状態にする (必要なら)
- ② (1, 1) 成分を, RI で 1 にする
- ③ ($i, 1$) 成分 ($i \neq 1$) を, RII ですべてゼロにする (っていっても (2, 1) 成分しかないけど)
- ④ (2, 2) 成分を, そのまま, または RIII で, ゼロ以外の状態にする (実は最初からゼロ以外であるはず)
- ⑤ (2, 2) 成分を, RI で 1 にする
- ⑥ ($i, 2$) 成分 ($i \neq 2$) を, RII ですべてゼロにする (っていっても (1, 2) 成分しかないけど)

単位行列にならないとき, $m \times n$ のときも, これを拡張した手順を使う

L20-Q2

Quiz(連立 1 次方程式)

① 連立 1 次方程式

$$x_2 + 2x_3 = 13,$$

$$x_1 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 = 17$$

を, 係数行列 A , 未知数ベクトル $\vec{x}$, 定数ベクトル $\vec{b}$ で書き直そう.

- ② 上の連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ の形に 行基本変形しよう. 1 回の基本操作では RI, RII, RIII のいずれかを 1 個だけ使い ($\overset{\textcircled{3}+\textcircled{1}\times(-3)}{\longrightarrow}$ のような 記号を記すこと), 横方向に $\overset{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}}{(::)} \longrightarrow \overset{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}}{(::)} \longrightarrow \overset{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}}{(::)} \longrightarrow \dots$ のように矢印でつないで記述する.
- ③ $\begin{matrix} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \gamma \end{matrix}$ が上の連立 1 次方程式を満たすことを確かめよう.

- ④ 係数行列の行列式 $\det A$ を, R1-R5 を使って $k \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ の形に持つ