

(簡約) 階段行列・階数・同次連立 1 次方程式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L21(2025-06-20 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-20 Fri 11:11 JST hig"

今日の目標

- 簡約/階段行列, 階数の定義を説明できる 石村畑 線形代数 §4.4
- 掃き出し法で簡約階段化できる 石村畑 線形代数 §4.4
- 同次連立 1 次方程式の解を求められる 石村畑 線形代数 §4.5



L20-Q1

Quiz 解答: 連立 1 次方程式

- ① $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \end{pmatrix}.$
- ② $(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$
- ③ $x_1=2, x_2=3.$ を上の 1 次方程式に代入すると成立することから, 解であることが確かめられる.
- ④ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \cdots = -6 \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$

より詳細な基本変形

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

より詳細な行列式の計算

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \times \frac{1}{2}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-4)} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-\frac{1}{3})} 2 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

L20-Q2

Quiz 解答: 連立 1 次方程式

- ① 略. $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書く. 問の指定で言う「等式」とは, $=$ のはいつた式のこと. 問の式で言う「書き直す」とは, 別の同値な形で書くこと.

②

$$(A|\vec{b}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

③

$x_1 = 7,$
 $x_2 = 3,$ を上の連立 1 次方程式に代入すると成立することから, 解で
 $x_3 = 5.$
 あることが確かめられる.

④

$$\det A = \cdots = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

より詳細な基本変形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2)} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

より詳細な行列式の計算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2)} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-1)} = \\
 -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{上三角}}{=} (-1) \times (-2) = 2.$$

ここまで来たよ

18 掃き出し法

19 (簡約) 階段行列・階数・同次連立 1 次方程式

- 階段行列・簡約階段行列・階数
- 同次連立 1 次方程式の解

(行) 階段形 (ref=row echelon form)

定義 (階段行列 (echelon matrix))

m 行 n 列の行列 A が**階段行列**であるとは、行番号が増すとともに左から連続して並ぶ 0 の個数が増えるような行列のこと。

石村畑 線形代数 p.122

左端見ていって、最初の非零成分が現れるまでの、0 の個数を数える。

階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

aE, O

階段形でない例

3 のところが縦 2 段になってるのがだめ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

mobius IH4.4

定義 (階段行列のいろいろな量)

m 行 n 列の階段行列 A に対して,

- 階数 (rank) $r = \text{rank} A$ 「段の個数」 ただし $0 \leq r \leq m$.
- 主成分 (ピボット (pivot)) a_{ic_i} ($i = 1, \dots, r$) 「階段の角」

mobius IH4.4

階段行列の例 $, aE, O$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

定義 (簡約階段行列 教科書に追加)

$m \times n$ 行列 A が簡約階段行列, 簡約階段形の行列である

$\Leftrightarrow$

E1 A が階段行列

E2 主成分がすべて 1

E3 主成分の真上の成分がすべて 0

簡約階段行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 E, O

mobius IH4.4

階段形だが簡約階段形でない例

 $aE (a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行基本変形定理

定理 (行基本変形定理)

任意の行列 A は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段行列に変形できる.
その簡約階段行列 (A の簡約階段化) はただ一つに定まる.

驚いて疑ってほしい定理

一意性の証明 省略

存在の証明 入力: A , 出力: A の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) を与えることによる.

このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination)) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要. 説明延期.

一般の行列の階数 (rank)

定義 (行列の階数 石村畑 線形代数 p123)

行列 A の簡約階段化の階数を, A の階数 (rank) といい $\text{rank} A$ と書く.

掃き出し法の概要

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

- (1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
- (2) 零でない再左の列で, RIII によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていったピボットにする
- (3) 持っていった非零成分 c を RI ① $\times (1/c)$ で 1 にする
- (4) RII ① $+ ① \times (-a)$ で, ブロックの $i (\geq 2)$ 行目の a を零にする
- (5) RII ① $+ ① \times (-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
 - * これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)-(5) を「再帰的に」行う
 - * 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

掃き出し法 (簡略版)

掃き出し法の概要 (簡略版)

行 (i) にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら,

- ① なるべく近い, ゼロばかりでない列を相手にする
- ② RIII 必要なら $(i) \leftrightarrow (j)$ でゼロでない成分を行 (i) に持ってくる (ピボットにする)
- ③ RI 必要なら $(i) \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
- ④ RII $(k) + (i) \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
- ⑤ RII $(k) + (i) \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

Web アプリで

<https://learn.hig3.net> > 行基本変形計算機

<https://bit.ly/redmatrix>



<https://learn.hig3.net> > 動画 簡約階段化

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

石村畑 線形代数 問題 32

L21-Q1

Quiz(簡約階段形)

次の行列を, 教科書の掃き出し法のアルゴリズムに従って, 簡約階段形に変形しよう. 1 つの矢印の上に, 1 つの基本操作を明示しよう. $\overset{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}}{\longrightarrow}$ のように.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここまで来たよ

18 掃き出し法

19 (簡約) 階段行列・階数・同次連立 1 次方程式

- 階段行列・簡約階段行列・階数
- 同次連立 1 次方程式の解

定義 (同次連立 1 次方程式)

定数項 $\vec{b}$ が $\vec{0}$ である連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

を同次 (homogeneous) 連立 1 次方程式という.

同次を斉次 (せいじ, さいじ) ともいう.

命題 (同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段形)

同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると,

$$(A|\vec{0}) \rightarrow \cdots \rightarrow (B|\vec{0})$$

となる.

例 同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段化が次のように得られたとする.

$$\tilde{B} = [B|\vec{b}'] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{array}{rclclcl} 0x_1 + & x_2 + & & 2x_4 + & & 4x_6 = & 0 \\ & & x_3 + & 3x_4 + & & 5x_6 = & 0 \\ & & & & x_5 + & 6x_6 = & 0 \\ & & & & & 0 = & 0 \end{array}$$

主成分 (ピボット) に対応する x_2, x_3, x_5 は、左辺の 1 個所にしか現れない (しかも係数 1 で) から、これらについて解くのは簡単.

$$x_2 = 0 - 2x_4 - 4x_6$$

$$x_3 = 0 - 3x_4 - 5x_6$$

$$x_5 = 0 - 6x_6$$

(他にも書くべきことあり)

主成分 (ピボット) に対応しない x_1, x_4, x_6 は任意だが、求めるべき量なので、右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない. 同等に扱うため、任意の実数 s, t, u を使って、 $x_1 = s, s \in \mathbb{R}$ 任意, のように書く.

解の答え方 1

$$x_1 = s$$

$$x_2 = 0 - 2t - 4u$$

$$x_3 = 0 - 3t - 5u$$

$$x_4 = t$$

$$x_5 = 0 - 6u$$

$$x_6 = u \quad (s, t, u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})$$

解の答え方 2 ベクトルの形でも書ける.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

同次連立 1 次方程式の解き方

簡約階段形の拡大係数行列を持つ同次連立 1 次方程式の解き方

- ① ピボットのない列 ($\vec{0}$, * になっている列) にかかる未知数を, 任意定数 (パラメタ) $s, t, \dots \in \mathbb{R}$ とおく. 任意定数の個数を **解の自由度 (degree of freedom)** という.
- ② ピボットに対応する未知数は, これらの任意定数の 1 次式で書ける (その行の式を解いて) .

例

石村畑 線形代数 問題 33,34

mobius IH4.5

<https://learn.hig3.net> > 動画 連立 1 次方程式

L21-Q2

Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の拡大係数行列 $(\vec{A}|\vec{0})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ、次のようになった。

$$\tilde{A} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A'|\vec{0})$$

- ① $A\vec{x} = \vec{0}$ と同値な連立 1 次方程式 $A'\vec{x} = \vec{0}$ を、行列を使わずに書こう。
- ② 任意定数 $s, t, u, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう。
- ③ 任意定数 $s, t, u, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \dots$ の形に書こう。

