

同次連立 1 次方程式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L22(2025-06-25 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-26 Thu 17:20 JST hig"

今日の目標

- 同次連立 1 次方程式の解を求められる 石村畑 線形代数 §4.5
- 階数と自由度の関係を説明できる 石村畑 線形代数 定理 4.5.1
- 同次連立 1 次方程式の解空間を求められる



L21-Q1

Quiz 解答: 簡約階段形

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times \frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数 $r = 2$. ピボットの位置 $c_1 = 2, c_2 = 3$.

ここまで来たよ

21 (簡約) 階段行列・階数

22 同次連立 1 次方程式

- 同次連立 1 次方程式の解
- 同次連立 1 次方程式の解の性質

定義 (同次連立 1 次方程式)

定数項 $\vec{b}$ が $\vec{0}$ である連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

を同次 (homogeneous) 連立 1 次方程式という.

同次を斉次 (せいじ, さいじ) ともいう.

命題 (同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段形)

同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると,

$$(A|\vec{0}) \rightarrow \cdots \rightarrow (A'|\vec{0})$$

となる.

$\vec{b}$ は $\vec{0}$ のまま変化しないので, (拡大 $(A|\vec{b})$ でなく) 係数行列 A 部分だけを基本変形することもある.

例 同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段化 $(A'|\vec{0})$ が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{0}) \rightarrow (A'|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

$\text{rank } A = 3$. 階数とは, 「実質的な」方程式の個数.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{array}{rclcl} 0x_1 + & x_2 + & & 2x_4 + & 4x_6 = & 0 \\ & & x_3 + & 3x_4 + & 5x_6 = & 0 \\ & & & & x_5 + & 6x_6 = & 0 \\ & & & & & 0 = & 0 \end{array}$$

主成分 (ピボット) に対応する x_2, x_3, x_5 は、左辺の 1 個所にしか現れない (しかも係数 1 で) から、これらについて解くのは簡単.

$$x_2 = 0 - 2x_4 - 4x_6$$

$$x_3 = 0 - 3x_4 - 5x_6$$

$$x_5 = 0 - 6x_6$$

(他にも書くべきことあり)

主成分 (ピボット) に対応しない x_1, x_4, x_6 は任意だが、求めるべき量なので、右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない. 同等に扱うため、任意の実数 s, t, u を使って、 $x_1 = s$ ($s \in \mathbb{R}$ 任意), のように書く.

他の変数を任意定数におくのも違法ではない. そうすると、見た目の異なる解が書けるが、後で見るように、任意定数の個数は変わらない.

解の答え方 1

$$x_1 = s$$

$$x_2 = 0 - 2t - 4u$$

$$x_3 = 0 - 3t - 5u$$

$$x_4 = t$$

$$x_5 = 0 - 6u$$

$$x_6 = u \quad (s, t, u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})$$

解の答え方 2 ベクトルの形でも書ける.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

同次連立 1 次方程式の解き方

簡約階段形の拡大係数行列を持つ同次連立 1 次方程式の解き方

- ① ピボットのない列 (左の $\vec{0}$ や, ピボットとピボットの間の列, 再右ピボットのもっと右の列) がかかる未知数を, 任意定数 (パラメタ) $s, t, \dots \in \mathbb{R}$ とおく.
- ② ピボットに対応する未知数は, これらの任意定数の 1 次式で書ける (その行の式を解いて) .

任意定数の個数は何個?

例 石村畑 線形代数 問題 33,34 mobius IH4.5

<https://learn.hig3.net> > 動画 連立 1 次方程式

L22-Q1

Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の拡大係数行列 $(A|\vec{0})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ、次のようになった。

$$(A|\vec{0}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A'|\vec{0})$$

- ① 連立 1 次方程式 $A'\vec{x} = \vec{0}$ を、行列を使わずに書こう。
- ② 任意定数 $s, t, u, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう。
- ③ 任意定数 $s, t, u, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \dots$ の形に書こう。

ここまで来たよ

21 (簡約) 階段行列・階数

22 同次連立 1 次方程式

- 同次連立 1 次方程式の解
- 同次連立 1 次方程式の解の性質

同次連立 1 次方程式の解の性質

命題

同次連立 1 次方程式はつねに**自明 (trivial) な解** $\vec{x} = \vec{0}$ を持つ

証明：代入すると $A\vec{0} = \vec{0}$ となり成立する

定義 (非自明な解)

同次方程式の $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を**非自明 (non-trivial) な解**という

英単語**自明 (trivial)** はいろんな文脈でも登場. 「わかりきった」?

英単語**非自明 (non-trivial)** はいろんな文脈でも登場. 「おもしろい」「おどろくべき」?

定理 (同次連立 1 次方程式の解 石村畑 線形代数 定理 4.5.1)

$m \times n$ 行列 A , n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ (**) を考える.
整数 $n - \text{rank } A$ を, (**) の解の自由度という.

- ① $n - \text{rank } A > 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意でない (自明な解に加えて, 非自明な解を持つ) 解は, 自由度と同じ個数の任意定数を含む.
- ② $n - \text{rank } A = 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意 (自明な解 $\vec{x} = \vec{0}$ のみ) .

mobius IH4.5

$$n - \text{rank } A = \text{自由度}$$

$$\text{未知数の個数} - \text{実質的な方程式の個数} = \text{任意定数の個数}$$

定義 (同次連立 1 次方程式の解空間 教科書に追加)

同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体の集合

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を, その同次連立 1 次方程式の**解空間**という.

同次連立 1 次方程式には常に自明な解がある $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式の解空間は原点を含む.

連立 1 次方程式の解空間を求めるとは,

図形の方程式をパラメタ表示に変換することに相当

L22-Q2

Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

空間の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える.
次の A に対して, $\text{rank } A$, 方程式の解の自由度を求めよう. 解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求めよう

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

石村畑 線形代数 §1.4

L22-Q3

Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

空間の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える.
次の A に対して, $\text{rank } A$, 方程式の解の自由度を求めよう. 解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求めよう

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

石村畑 線形代数 §1.4 線形代数☆演習 I(2025)L06 パラメタ表示

L22-Q4

Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

xy 平面の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える.

次の A に対して, $\text{rank } A$, 方程式の解の自由度を求めよう. 解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求め, 平面上に描こう.

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

石村畑 線形代数 §1.3

同次連立 1 次方程式の解空間の分類

$n - \text{rank } A = \text{解の自由度} = \text{解空間の「次元」}$

「次元」の正確な定義は [線形代数☆演習 II\(2025\)L??](#)

次元定理 ([線形代数☆演習 II\(2025\)L??](#))

準同型定理 (代数入門)

未知数の個数 n 未知数の空間 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	階数 $r = \text{rank } A$ 方程式の実質的個数	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間の次元
2(平面)	2	0(1 点 $\vec{0}$)
2(平面)	1	1(直線)
2(平面)	0	2(平面全体)
3(空間)	3	0(1 点 $\vec{0}$)
3(平面)	2	1(直線)
3(平面)	1	2(平面)
3(平面)	0	3(空間全体)
$\vdots$		

実は、階数 r にも空間の「次元」次元としての意味がつく．待て次回．