

同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L23(2025-06-27 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-02 Wed 07:21 JST hig"

今日の目標

- 線形写像の逆像，像を求められる
- 非同次連立 1 次方程式の解を求められる

石村畑 線形代数 §4.6



L22-Q1

Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

①

$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & +5x_6 & = 0, \\
 & & x_4 & +4x_5 & +6x_6 & = 0, \\
 & & & & 0 & = 0, \\
 & & & & 0 & = 0.
 \end{array}$$

② $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= s, \\
 x_2 &= 0 - 2t - 3u - 5v, \\
 x_3 &= t, \\
 x_4 &= 0 - 4u - 6v, \\
 x_5 &= u, \\
 x_6 &= v.
 \end{aligned}$$

③ $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

L22-Q2

Quiz 解答: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

簡約階段形は $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

階数 1. 自由度 $3 - 1 = 2$.

$$x_1 = -3s - 2t,$$

$$x_2 = s,$$

$$x_3 = t \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$. 空間内の, $\vec{0}$ を通り, 接ベクトル $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の平面.

L22-Q3

Quiz 解答: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

階数 2. 自由度 $3 - 2 = 1$.

$$x_1 = 4s,$$

$$x_2 = -2s,$$

$$x_3 = s \quad (s \in \mathbb{R})$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s \mid s \in \mathbb{R} \right\}$. 空間内の, $\vec{0}$ を通り, 接線ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線.

L22-Q4

TA Prob and Sol: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

xy 平面の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える.

次の A に対して, $\text{rank } A$, 方程式の解の自由度を求めよう. 解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求め, 平面上に描こう.

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

略解

$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える.

- ① 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 階数 1, 解の自由度 1. 解空間は $\{(-\frac{1}{2})s | s \in \mathbb{R}\}$. 原点を通り, 接線ベクトル $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線.
- ② 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 階数 2, 解の自由度 0. 解空間は原点 $\{\vec{0}\}$.

- ▶ このケースは, $\det A \neq 0$ なので, 逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ を $\vec{0}$ にかけることによって求められた.

③ 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 階数 0, 解の自由度 2. 解空間は空間 $\mathbb{R}^2$ 全体.

同次連立 1 次方程式の解空間の分類

$n - \text{rank } A = \text{解の自由度} = \text{解空間の「次元」}$

「次元」の正確な定義は [線形代数☆演習 II\(2025\)L??](#)

次元定理 ([線形代数☆演習 II\(2025\)L??](#))

準同型定理 (代数入門)

未知数の個数 n 未知数の空間 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	階数 $r = \text{rank } A$ 方程式の実質的個数	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間の「次元」
2(平面)	2	0(1点 $\{\vec{0}\}$)
2(平面)	1	1(直線)
2(平面)	0	2(平面全体)
3(空間)	3	0(1点 $\{\vec{0}\}$)
3(平面)	2	1(直線)
3(平面)	1	2(平面)
3(平面)	0	3(空間全体)
$\vdots$		

実は、階数 r にも空間の「次元」次元としての意味がつく。

ここまで来たよ

22 同次連立 1 次方程式

23 同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解

- 写像と連立 1 次方程式
- 非同次連立 1 次方程式の解

L23-Q1

Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f: X \rightarrow Y$ で、 $X = Y = \mathbb{R}^2$ とする. f は次の A で表されるとする. すなわち、 $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

$\{\vec{0}\} \subset Y$ の逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) \subset X$ を求めて平面 X 上に描こう.

X の像すなわち値域 $f(X) \subset Y$ を求め、平面 Y 上に描こう.

① $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

② $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

③ $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3次元以上の場合、線形独立 線形代数☆演習 II(2025)L?? の考えが必要になる.

復習：写像の逆像

線形代数☆演習 I(2025)L15

写像 $f: X \rightarrow Y$, X : 定義域, Y : 終域

定義 (復習：部分集合の像)

線形代数☆演習 I(2025)L12

写像 $f: X \rightarrow Y$ と, 定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して,
 $\{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, f による S の像といい, $f(S)$ と書く.

定義 (集合の逆像)

教科書に追加

部分集合 $T \subset Y$ に対して, X の部分集合 $\{x \in X | f(x) \in T\}$ を, f による T の逆像といい, $f^{-1}(T)$ とかく.

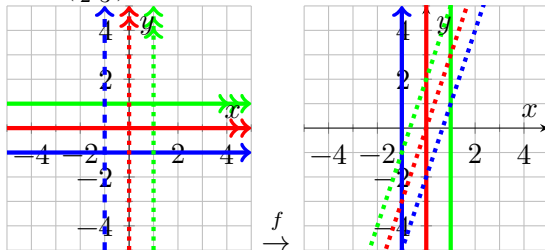
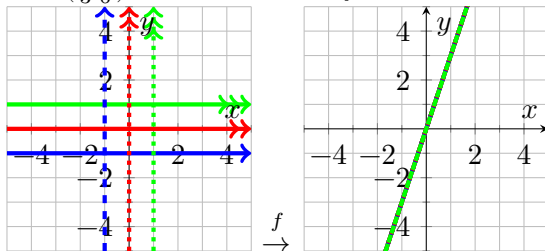
定義 (復習：値域 (range))

線形代数☆演習 I(2025)L12

定義域の像 $f(X) = \{f(x) | x \in X\} \subset Y$ を f の値域という.

teamL12

線形代数☆演習 I(2025)L12

 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.


方程式の解と逆像再訪

線形代数☆演習 I(2025)L15

逆像

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f: \mathbb{X} \rightarrow Y$ を考える.

($X = \mathbb{R}^2 = Y$ だから線形変換と言ってもいい)

連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解け $\Leftrightarrow$ 解空間を求めよ $\Leftrightarrow$

逆像 $W = f^{-1}(\{\vec{0}\}) \subset X$ を求めよ

$\{\vec{0}\}$ の, 線形写像 f による逆像を核 (kernel) $\text{Ker } f$ といい,

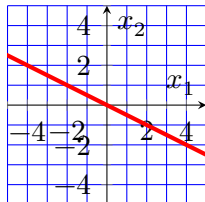
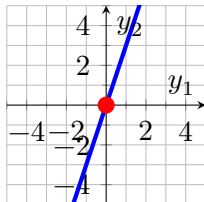
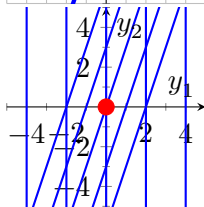
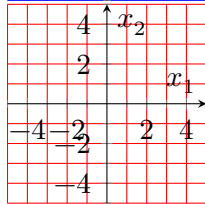
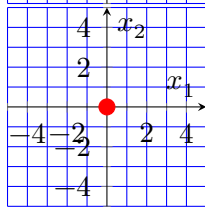
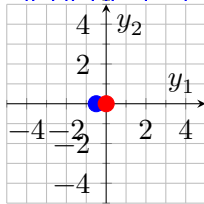
線形代数☆演習 II(2025)L?? の重要登場人物.

f の値域 $\text{Im } f$ を求めよ

X の任意の元 $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \vec{e}_1 s + \vec{e}_2 t$ ($s, t \in \mathbb{R}$) に対して,

$f(\vec{x}) = f(\vec{e}_1)s + f(\vec{e}_2)t$

‘線形写像は $f(\vec{e}_i)$ だけで決まる’


 f
 $\rightarrow$

 f
 $\rightarrow$

 f
 $\rightarrow$


$$n = 2$$

A	n 定義域 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	$\text{rank } A$ 像 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間 (核) の「次元」
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	2(平面)	2(平面)	0(1 点)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	2(平面)	1(直線)	1(直線)
O	2(平面)	0(1 点)	2(平面)
	全体	「残る分」	「圧縮」される分

ここまで来たよ

22 同次連立 1 次方程式

23 同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解

- 写像と連立 1 次方程式
- 非同次連立 1 次方程式の解

非同次連立 1 次方程式の解

石村畑 線形代数 §4.6

$A\vec{x} = \vec{b}$ を解け.

拡大係数行列の簡約階段化が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{b}) \rightarrow (A'|\vec{b}') = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array} \right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

非同次連立 1 次方程式の解 石村畑 線形代数 §4.6 II

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は、

$$\begin{array}{rclcl}
 0x_1 + & x_2 + & & 2x_4 + & 4x_6 = & b_1 \\
 & & x_3 + & 3x_4 + & 5x_6 = & b_2 \\
 & & & & x_5 + & 6x_6 = & b_3 \\
 & & & & & 0 = & b_4
 \end{array}$$

$b_4 \neq 0$ のとき、解なし．解集合は $\emptyset$

$\text{rank } A < \text{rank } (A|\vec{b})$ ならば解なし（実は必要十分条件）

$b_4 = 0$ のとき、

すなわち $\text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b})$ のとき、

解が存在することを見よう．

例 拡大係数行列の簡約化が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{b}) \rightarrow (A'|\vec{b}') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{array}{rclclcl} 0x_1 + & x_2 + & & 2x_4 + & & 4x_6 = & b_1 \\ & & x_3 + & 3x_4 + & & 5x_6 = & b_2 \\ & & & & x_5 + & 6x_6 = & b_3 \\ & & & & & 0 = & 0 \end{array}$$

主成分 (ピボット) に対応する x_2, x_3, x_5 は、左辺の 1 個所にしか現れない (しかも係数 1 で) から、これらについて解くのは簡単.

$$x_2 = b_1 - 2x_4 - 4x_6$$

$$x_3 = b_2 - 3x_4 - 5x_6$$

$$x_5 = b_3 - 6x_6$$

(他にも書くべきことあり)

主成分 (ピボット) に対応しない x_1, x_4, x_6 は任意だが、求めるべき量なので、右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない. 同等に扱うため、任意の実数 s, t, u を使って、 $x_1 = s$, $s \in \mathbb{R}$ 任意, のように書く.

解の答え方 1 (解があるとき)

$$x_1 = s$$

$$x_2 = b_1 - 2t - 4u$$

$$x_3 = b_2 - 3t - 5u$$

$$x_4 = d$$

$$x_5 = b_3 - 6u$$

$$x_6 = u \quad (s, t, u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})$$

解の答え方 2 (解があるとき) ベクトルの形でも書ける.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

L23-Q2

Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の拡大係数行列 $(\overline{A}|\vec{b})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ、次のようになった。

$$(\overline{A}|\vec{b}) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① $A\vec{x} = \vec{b}$ と同値な連立 1 次方程式を、行列を使わずに書こう。
- ② 解はあるか。任意定数 $s, t, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう。
- ③ 任意定数 $s, t, \dots \in \mathbb{R}$ を使って、解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \dots$ の形に書こう。