

非同次連立 1 次方程式の解の性質

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2025-07-02 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-02 Wed 08:01 JST hig"

今日の目標

- 非同次連立 1 次方程式の解集合を求められる.
- 非同次連立 1 次方程式の解集合を, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}\})$ と見られる.



L23-Q1

Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$, すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.

- ① $A_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 解の自由度は 1, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく, $\{(-\frac{1}{2})s | s \in \mathbb{R}\}$. すなわち, 原点 $\vec{0}$ を通り $(-\frac{1}{2})$ に平行な直線. 値域は $\{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{A_1 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{1}{3})(s + 2t) | s, t \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{1}{3})u | u \in \mathbb{R}\} \subset Y$.

すなわち, 原点 $\vec{0}$ を通り $(\frac{1}{3})$ に平行な直線.

- ② $A_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より解の自由度は 0. 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく, 解空間は自明な解 $\vec{0}$ のみからなる $\{\vec{0}\}$.

$\det A_2 \neq 0$ なので, $\vec{x} = A_2^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ によっても求められる.

値域は $\{A_2\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{A_2 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{0}{2})s + (\frac{1}{3})t | s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 = Y$.

このことは, 任意の $\vec{y} \in Y = \mathbb{R}^2$ に対して, $\vec{x} = A_2^{-1}\vec{y}$ ととると, $f(\vec{x}) = \vec{y}$ となることからわかる.

- ③ $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より解の自由度は 2 で、逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく、 $\{(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})s + (\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})t \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ すなわち、 $X = \mathbb{R}^2$ 全体。
 任意の $\vec{x} \in X$ に対して $A_0\vec{x} = \vec{0}$ より、値域は $\{\vec{0}\} \subset Y$.

L23-Q2

Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

①

$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & +5x_6 & = 7, \\
 & & x_4 & +4x_5 & +6x_6 & = 8, \\
 & & & & 0 & = a, \\
 & & & & 0 & = 0.
 \end{array}$$

② $a \neq 0$ のとき, $\text{rank } A = 2 < \text{rank } (A|\vec{b}) = 3$ なので解なし. 実際, 3 番目の式が直ちに矛盾している.

$a = 0$ のとき, $\text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b}) = 2$ であり解が存在する.

$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$x_1 = s,$$

$$x_2 = 7 - 2t - 3u - 5v,$$

$$x_3 = t,$$

$$x_4 = 8 - 4u - 6v,$$

$$x_5 = u,$$

$$x_6 = v.$$

③ $a \neq 0$ のとき解なし.

$a = 0$ のとき, $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

定理 (非同次連立 1 次方程式の解の存在と自由度 石村畑 線形代数 定理 4.6.1)

A を $m \times n$ 行列とする.

n 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ (*) の拡大係数行列を $(A|\vec{b})$ とする.

- ① $\text{rank } A < \text{rank } (A|\vec{b}) \Leftrightarrow (*)$ が解を持たない
- ② $\text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b}) = n \Leftrightarrow$ ただ 1 つの解を持つ
 - ▶ 解の自由度は $n - \text{rank } A = 0$
 - ▶ $\vec{b} = 0$ のとき「自明な解 $\vec{x} = 0$ のみ持つ」
- ③ $\text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b}) < n \Leftrightarrow$ 解を無限個持つ
 - ▶ 解の自由度は $n - \text{rank } A > 0$. 解は $n - \text{rank } A$ 個の任意定数を持つ.
 - ▶ $\vec{b} = 0$ のとき「無数の非自明な解を持つ」

, mobius IH4.6

L24-Q1

Quiz(拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度)

次の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を持つ連立 1 次方程式は解を持つか？ 解を持つなら解の自由度，解が一意的であるかどうかを答えよう．

- ①
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
- ②
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

石村畑 線形代数 問題 35,36

非同次連立 1 次方程式の解集合の分類

$\text{rank } A < \text{rank } (A|\vec{b})$ のとき解集合 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \emptyset$.

$\text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b})$ のとき解集合 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) \neq \emptyset$.

$n = \text{rank } A + \text{自由度}$ で定まる自由度だけの広がりを持つ.

$n = 2$ の例

n 定義域 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	$\text{rank } A$ 値域 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合 の「次元」
2(平面)	2(平面)	0(1 点)
2(平面)	1(直線)	1(直線)
2(平面)	0(1 点)	2(平面)
全体	「残る分」	「圧縮」される分

L24-Q2

Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $X = Y = \mathbb{R}^2$ とする. f は次の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ で, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される.

- ① f の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう.
- ② $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合を求めよう.
- ③ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう.
- ④ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合を求めよう.
- ⑤ 上の解集合の, x_1 軸 ($x_2 = 0$), x_2 軸 ($x_1 = 0$) との共有点をそれぞれ求めよう.

石村畑 線形代数 §1.3

命題

非同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解なしになるのは、写像 $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ の値域に $\vec{b}$ が属さないとき.

$\vec{b} = \vec{0}$ は必ず値域に含まれるため、同次連立 1 次方程式は必ず自明な解を持つ.

同じ $\vec{b}$ で、 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_0 = O$ の場合は解はあるか？

命題

$A\vec{x} = \vec{b}$ に解があるとき、対応する同次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ と比較すると、解空間は、 $\vec{b}$ だけ平行移動した、平行な集合になっている.

L24-Q3

Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$ とする. f は次の $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 18 & 12 \end{pmatrix}$ で, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される.

- ① f の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう.
- ② $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合を求めよう.
- ③ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう.
- ④ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう $= f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合を求めよう.
- ⑤ 上の解集合の, x_1x_2 平面 ($x_3 = 0$) との共有点を求めよう.
- ⑥ 上の解集合の, x_1 軸 ($x_2 = x_3 = 0$) との共有点をそれぞれ求めよう.

石村畑 線形代数 §1.4

線形代数☆演習 I(2025)L06

平面のパラメタ表示 teamL08

$n = 3$ の例

	n 定義域 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	$\text{rank } A$ 値域 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合 の「次元」
	3(空間)	3(空間)	0(1 点)
	3(空間)	2(平面)	1(直線)
	3(空間)	1(直線)	2(平面)
	3(空間)	0(1 点)	3(空間)
	全体	「残る分」	「圧縮」される分

図形（部分集合）を表現する 2 つの方法

石村畑 線形代数 §1.3

直線のパラメタ表示と方程式 teamL06

石村畑 線形代数 §1.4

線形代数☆演習 I(2025)L06 平面のパラメタ表示 teamL08

	パラメタ表示	方程式
写像の言葉で	像	逆像
例	$\{\vec{p}(t) \in \mathbb{R}^3 t \in \mathbb{R}\}$	$\{\vec{x} f(\vec{x}) = 0\}$
	写像 $\vec{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ の値域 $f(\mathbb{R})$	$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の逆像 $f^{-1}(\{0\})$
形容詞	陽（的）な表現 明示的な explicit	陰（的）な表現 非明示的な implicit

L24-Q4

Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $X = Y = \mathbb{R}^2$ とする. f は次の $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される.

- ① f の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう.
- ② $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう = $f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう.
- ③ 上の値域と逆像をを描こう

授業の進行について連絡

- 2025-07-09 水 1 L26 TrialL25 は対面ではなく後日のレポート 1 提出
 - ▶ レポートの提出は Manaba や Teams や授業内手渡しではなく、特定日時、特定場所で手渡しです．これは、数理・情報科学課程にまつわる場所や人を探検することがレポートの目的のひとつであるためです（龍谷ミュージアムレポートのようなもの）．特に、授業内に樋口は受け取りません．
- 2025-07-11 金 1 L27 教室変更 計算機実習室 1-609（情報基礎と同じ）
- 2025-07-16 水 1 L28 TrialL27 は対面ではなく後日レポート 2 提出予定
- 2025-07-18 金 1 L29
- 2025-07-23 水 1 L30
- Trial L30 は Mobius or レポート 3（特定の日でない）
- LearnMoodle 成績評価方法のお知らせ 線形代数☆演習 I(2025)L23
 - ▶ 2025-07-30 水 1 任意参加小テスト
 - ▶ 2025-08-01 金 1 何もなし
- 2025-09-08? 全科目共通成績発表