

線形変換の像と逆像・線形独立

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L25(2025-07-04 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-09 Wed 21:12 JST hig"

今日の目標

- 2,3 次元の空間の間の線形写像について、値域や逆像を求め描ける
- 2,3 個のベクトルの組の線形独立性を説明できる

石村畑 線形代数 §1.4



Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

- ① 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in X$ ($s, t \in \mathbb{R}$) に対して, $A\vec{x} = A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$, ここで $u = s + 2t \in \mathbb{R}$.
よって,
値域 $f(X) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u | u \in \mathbb{R}\} \subset Y$.
すなわち, 原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
- ② 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$, すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.
同次方程式なので解は存在する. $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 解の自由度は 1,
逆像は解空間に等しく, $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s | s \in \mathbb{R}\}$. すなわち, 原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
- ③ $(A|\vec{b}_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 $1 = \text{rank } A < \text{rank } (A|\vec{b}_1) = 2$ より, 解なし.
逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\}) = \emptyset$.

$$\textcircled{4} \quad (A|\vec{b}_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$1 = \text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b}_2) = 1$ より, 解あり.

解の自由度は $2 - 1 = 1$, 逆像は解集合に等しく,

$f^{-1}(\{\vec{b}_2\}) = \{ \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s \mid s \in \mathbb{R} \}$. すなわち, $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ を通り $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線.

$\textcircled{5}$

なお,

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 f_2 について, 値域は $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. 逆像はすべて 1 点 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \{A^{-1}\vec{b}\}$.

$A_0 O$ の表す線形写像 f_0 について, 値域は $f(\mathbb{R}^2) = \{\vec{0}\}$. 逆像は, $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$, $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \emptyset$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$).

ここまで来たよ

24 非同次連立 1 次方程式の解の性質

25 線形変換の像と逆像・線形独立

- 線形写像の値域と逆像
- 2,3 次元の線形独立性

線形代数☆演習 I(2025)L22

の同次連立 1 次方程式再訪

L25-Q1

Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f: X \rightarrow Y$ で, $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$ とする. f は, $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 18 & 12 \end{pmatrix}$ で $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される.

- ① f の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう.
- ② $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\}) \subset X$ を求めよう = 「 $f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合」を求めよう.
- ③ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう = ...
- ④ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう = ...
- ⑤ $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合の, $x_1 x_2$ 平面 ($x_3 = 0$) との共有点を求めよう.
- ⑥ $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合の, x_1 軸 ($x_2 = x_3 = 0$) との共有点を求めよう.

石村畑 線形代数 §1.4

線形代数☆演習 I(2025)L06

平面のパラメタ表示

線形代数☆演習 I(2025)L08

共

有点 teamL08

$n = 3$ の例

	n 定義域 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	$\text{rank } A$ 値域 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」	解の自由度=任意定数の個数 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合 の「次元」
	3(空間)	3(空間)	0(1 点)
	3(空間)	2(平面)	1(直線)
	3(空間)	1(直線)	2(平面)
	3(空間)	0(1 点)	3(空間)
	全体	「残る分」	「圧縮」される分

ここまで来たよ

24 非同次連立 1 次方程式の解の性質

25 線形変換の像と逆像・線形独立

- 線形写像の値域と逆像
- 2,3 次元の線形独立性

線形独立

線形独立 (1 次独立, linear independent), **線形従属** (1 次従属, linear dependent) は, 線形代数 II の重要概念. 定義は 石村畑 線形代数 §5.3.

ここでは, 平面ベクトル, 空間ベクトルに限った場合 石村畑 線形代数 p.13 を不完全に扱う.

定義 (線形結合, 1 次結合 (linear combination)) 石村畑 線形代数 p.154

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ の線形結合とは, スカラー $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ を係数とする和

$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_k \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$$

のことを言う.

定義 (線形従属 石村畑 線形代数 p.155)

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線形従属であるとは、 $\vec{a}_i$ のいずれかが、他の $\vec{a}_j (i \neq j)$ の線形結合で表せることを言う。

定義 (線形独立 石村畑 線形代数 p.155)

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線形独立であるとは、線形従属でないことを言う。すなわち、 $\vec{a}_i$ のいずれもが、他の $\vec{a}_j (i \neq j)$ の線形結合で表せないことを言う。

線形独立とは「 k 人全員が役割を果たしていること」

例 (ベクトル 2 個組の線形従属性)

ベクトルの組 $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

ベクトルの組 $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

ベクトルの組 $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

2 つのベクトルが平行なとき, または一方が $\vec{0}$ のとき線形従属. (一方が他方のスカラー倍のとき)

例 (ベクトル 2 個組の線形独立性)

ベクトルの組 $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ は線形独立.

ベクトルの組 $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ は線形独立.

2 つのベクトルが平行でなく, どちらも $\vec{0}$ でないとき線形独立. (一方が他方のスカラー倍でないとき)

2 つのベクトルが (つぶれてない) 平行四辺形を作るとき.

例 (ベクトル 3 個組の線形従属性)

ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形従属.

3 つのベクトルが一平面内 (含むひとつが $\vec{0}$) のとき線形従属.

例 (ベクトル 3 個組の線形独立性)

ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形独立.

ベクトルの組 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形独立.

3 つのベクトルが平面内になくとき線形独立.

3 つのベクトルが (つぶれてない) 平行六面体を作るとき.

命題 (平面ベクトル 2 個の線形独立性)

ベクトルの 2 個組 $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ が線形独立であることと次は同値

- 2 次正方行列 $(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ が階数 2, 正則 石村畑 線形代数 定理 5.3.1
- $\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \neq 0$ 石村畑 線形代数 定理 5.3.1

命題 (空間ベクトル 3 個の線形独立性)

ベクトルの 3 個組 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ が線形独立であることと次は同値

- 3 次正方行列 $(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$ が階数 3, 正則 石村畑 線形代数 定理 5.3.1
- $\det(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \neq 0$ 石村畑 線形代数 定理 5.3.1

線形独立であるかどうかによって変わること

線形写像 $f: X \rightarrow Y$, $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$ が 2 次正方行列 $A = (::) = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ で表されるとする.

f の値域は？

任意の点 $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in X$, $s, t \in \mathbb{R}$ を写すと, $f(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}) = \vec{a}_1 s + \vec{a}_2 t$ ($s, t \in \mathbb{R}$)

これは, 平面のパラメタ表示に似てるが, 平面全体を動くのだろうか？

- 線形従属のとき, No. 実際に動くのは直線 (や一点)
- 線形独立のとき, Yes.

L25-Q2

Quiz(線形独立・線形従属)

次のベクトルの組は線形独立かどうか, 答えよう.

- ① $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
- ④ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ⑤ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$