

逆行列の行基本変形による計算

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L26(2025-07-09 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-09 Wed 15:10 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形で、正方行列が正則かどうか判定できる
- 行基本変形で、正則行列の逆行列を求められる

石村畑 線形代数 §4.7



L25-Q1

Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

- ① 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \in X$ ($s, t, u \in \mathbb{R}$) に対して, $A\vec{x} = A \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v$,
 ここで $v = 2s + 6t + 4u \in \mathbb{R}$. よって, 値域
 $f(X) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v | v \in \mathbb{R}\} \subset Y$.
 すなわち, 原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
- ② 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$, すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.
 同次方程式なので解は存在する. $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 解の自由度は
 $3 - 1 = 2$,
 逆像は解空間に等しく,
 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\} =$
 $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$. これは, 原点 $\vec{0}$ を通り
 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$ を接ベクトルとする平面.

$$\textcircled{3} \quad (A|\vec{b}_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$1 = \text{rank } A < \text{rank } (A|\vec{b}_1) = 2$ より, 解なし. 逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\}) = \emptyset$.

$$\textcircled{4} \quad (A|\vec{b}_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$1 = \text{rank } A = \text{rank } (A|\vec{b}_2) = 1$ より, 解あり. 自由度は $3 - 1 = 2$. 逆像は解集合に等しく, $f^{-1}(\{\vec{b}_2\}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$. すなわち, $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を通り $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を接ベクトルとする平面.

$\textcircled{5}$ 共有点は $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ かつ $x_3 = 0$ を満たす点. この非同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって, 共有点の集合は

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 = 6, x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ⑥ 共有点は $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ かつ $x_2 = x_3 = 0$ を満たす点. この非同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

問に対して必須ではないが, 集合として答えるなら,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 = 6, x_2 = x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ここまで来たよ

25 線形変換の像と逆像・線形独立

26 逆行列の行基本変形による計算

- 行基本変形による逆行列の計算方法

行基本変形による逆行列の計算方法

石村畑 線形代数 §4.7

$n \times n$ 行列 A の逆行列 $X = A^{-1}$ を求めたい.

逆行列の定義は「 $AX = XA = E$ を満たす行列」

$n = 3$ で具体的に.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

未知数 x_{ij} に対する $n \times n = 9$ 元連立 1 次方程式を解いて, x_{ij} を求めればいいのでは?

よく見ると, 未知数は 3 グループに分かれる.

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, A\vec{x}_3 = \vec{e}_3.$$

よって, $n = 3$ 個の拡大係数行列

$$(A|\vec{e}_1), (A|\vec{e}_2), (A|\vec{e}_3)$$

をそれぞれ簡約階段化すればいい.

その操作を考えると… A を E にするところまでは共通.

$$(A|\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) \rightarrow (E|\vec{x}_1|\vec{x}_2|\vec{x}_3)$$

と簡約階段形にすればいい.

逆行列を求める筆算

石村畑 線形代数 p.144

n 次正方行列 A が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $(A|E)$ を考え, **行**基本変形で(掃き出し法で)簡約階段形にする.

$$(A|E) \rightarrow \cdots \rightarrow (E|B)$$

となったなら, A は正則で, B が求める逆行列 $B = A^{-1}$.

A^1 に施して, 簡約階段形 $E = A^0$ にする, ような行基本変形は, $E = A^0$ に施すと, A^{-1} にする.

<https://learn.hig3.net/> 動画 逆行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で実演.

行基本変形計算機



<https://linalg.hig3.net/redmatrix>

「自分の操作の履歴」

範囲指定スクリーンショット

Windows 11 Windows+Shift+S

Mac Command+Shift+4

でデスクトップにファイルができる.

復習：掃き出し法の概要

線形代数☆演習 I(2025)L21

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

- (1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
- (2) 零でない再左の列で, RIII によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持って行ってピボットにする
- (3) 持っていった非零成分 c を RI $\textcircled{1} \times (1/c)$ で 1 にする
- (4) RII $\textcircled{i} + \textcircled{1} \times (-a)$ で, ブロックの $i (\geq 2)$ 行目の a を零にする
- (5) RII $\textcircled{i} + \textcircled{1} \times (-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
 - * これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)-(5) を「再帰的に」行う
 - * 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

復習：掃き出し法 (簡略版)

線形代数☆演習 I(2025)L21

掃き出し法の概要 (簡略版)

行 (i) にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら、

- ① なるべく近い、ゼロばかりでない列を相手にする
- ② RIII 必要なら $(i) \leftrightarrow (j)$ でゼロでない成分を行 (i) に持ってくる (ピボットにする)
- ③ RI 必要なら $(i) \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
- ④ RII $(k) + (i) \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
- ⑤ RII $(k) + (i) \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

L26-Q1

Quiz(逆行列)

次の行列は正則か？ $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることによって判定しよう（行列式を計算するのではなく）。

正則なら逆行列を答えよう（行列式と余因子行列を計算するのではなく， $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることで）。正則でないなら階数を答えよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

mobius IH4.7, 石村畑 線形代数 問題 37, 総合演習 4 問 3, レポート 2=trialL27 になる予定

正則か？ の判定

命題 (正則と階数の関係)

n 次正方形列 A の階数 $\text{rank } A = n$ なら正則, 正則なら $\text{rank } A = n$
(とうことは, 階数 $\text{rank } A < n$ なら正則でない, 正則でないなら $\text{rank } A < n$)

証明

- rank $A = n$ とする. n 組の連立 1 次方程式にはすべて解がある. よって $X = A^{-1}$ が存在する. よって A は正則.
- A が正則とする. A^{-1} が存在する. n 組の連立 1 次方程式にはすべて解がある. よって, $\text{rank } A = \text{rank } (A|E)$. (背理法) $\text{rank } A = \text{rank } (A|E) < n$ だとすると, n 組の方程式の自由度はすべて正で, 解は一意的でない. しかし A^{-1} は一意的なので矛盾. よって, $\text{rank } A = \text{rank } (A|E) = n$.

「 A が正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

- 「逆行列の求め方」で, $(A|E)$ を簡約階段形に基本変形する. $(E|B)$ に到達したなら逆行列 $B = A^{-1}$ が得られる.
- 簡約階段化で $(E|B)$ に到達しないなら, $\text{rank } A < n$ ということ. よって正則でない. 副産物として $\text{rank } A$ が求まる.

行列 A が正則かどうかの、その他の判定方法

- 正則であるためには、正方行列 (n 行 n 列) であることが大前提.
- 行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ は正則

たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら, $\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は正則. $\Delta = 0$ なら正則でない.
- $XA = AX = E$ となる X がたまたま見つければ正則 (もともとの定義).
- A にうまく行基本変形して, 線形代数☆演習 I(2025)L18 p.16 行列式がゼロである行列の形に持って行けるなら正則でない.

L26-Q2

Quiz(逆行列)

次の行列は正則か？ $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることによって判定しよう（行列式を計算するのではなく）。

正則なら逆行列を答えよう（行列式と余因子行列を計算するのではなく， $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることで）。正則でないなら階数を答えよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

授業の進行について連絡

- 2025-07-09 水 1 L26. TrialL25 は対面ではなく後日のレポート 1 提出
 - ▶ レポートの提出は Manaba や Teams や授業内手渡しではなく、特定日時、特定場所で手渡しです。これは、数理・情報科学課程にまつわる場所や人を探検することがレポートの目的のひとつであるためです（龍谷ミュージアムレポートのようなもの）。特に、授業内に樋口は受け取りません。
- 2025-07-11 金 1 L27. 教室変更 計算機実習室 1-609（情報基礎と同じ）各自で動画を見るため **教室設置 PC につながる有線イヤフォンまたはノート PC につながるイヤフォン持参**
- 2025-07-16 水 1 L28. TrialL27 は対面ではなく後日レポート 2 提出予定
- 2025-07-18 金 1 L29.
- 2025-07-23 水 1 L30.
- Trial L30 は Mobius or レポート 3（特定の日でない）
- LearnMoodle 成績評価方法のお知らせ 線形代数☆演習 I(2025)L23
 - ▶ 2025-07-30 水 1 任意参加小テスト
 - ▶ 2025-08-01 金 1 何もしない
- 2025-09-08? 全科目共通成績発表