

行基本変形による行列式の計算

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L28(2025-07-16 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-18 Fri 06:46 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形を使って行列式を計算できる

教科書に追加



ここまで来たよ

27 数式処理システム Maple

28 行基本変形による行列式の計算

- 行列式
- 対角行列の復習

復習：行列式

石村畑 線形代数 §3

n 次正方行列 A に対して，行列 $\det A = |A|$ は実数．
写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ の体積拡大率が $\det A$ ．

定理 (定義と計算方法：余因子展開)

石村畑 線形代数 p.65

$A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列
 $\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子 とするとき，

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \tilde{a}_{i\ell}.$ (i 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} \tilde{a}_{\ell j}.$ (j 列目における余因子展開)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} \cdot & 12 & 13 & 14 \\ \cdot & 22 & 23 & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & \cdot & 13 & 14 \\ 21 & \cdot & 23 & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 31 & \cdot & 43 & 44 \end{vmatrix} + 33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & \cdot & 14 \\ 21 & 22 & \cdot & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 31 & 32 & \cdot & 44 \end{vmatrix} - 34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdot \\ 21 & 22 & 23 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 31 & 32 & 43 & \cdot \end{vmatrix}$$

復習：行列式の性質

命題 (上三角・下三角行列の行列式の値 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L16)

上三角行列・下三角行列の行列式は、対角成分の積である

命題 (行列式がゼロになる十分条件 線形代数☆演習 I(2025)L19)

A を n 次正方行列とする.

- A に、すべて 0 である行があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 行が、第 j 行 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら、 $|A| = 0$
- A に、すべて 0 である列があれば $|A| = 0$.
- A の第 i 列が、第 j 列 ($i \neq j$) の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら、 $|A| = 0$

定理 (基本操作と行列式)

石村畑 線形代数 p.80,p.81

A に次の基本操作をして得た行列を B とする. $i \neq j, k \neq 0$.

$$A \xrightarrow{(R*), (C*)} B$$

	基本操作	行列式
行基本操作 RIII(R3)	$\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$	$\det A = (-1) \times \det B$
行基本操作 RI(R2)	$\textcircled{i} \times k$	$\det A = \frac{1}{k} \times \det B$
行基本操作 RII(R5)	$\textcircled{i} + \textcircled{j} \times a$	$\det A = \det B$
列基本操作 CIII(C3)	$\textcircled{i}' \leftrightarrow \textcircled{j}'$	$\det A = (-1) \times \det B$
列基本操作 CI(C2)	$\textcircled{i}' \times k$	$\det A = \frac{1}{k} \times \det B$
列基本操作 CII(C5)	$\textcircled{i}' + \textcircled{j}' \times a$	$\det A = \det B$

行基本変形による行列式の計算

- A を行基本変形で簡約階段化したとき単位行列になる ($\text{rank } A = n$) なら, 係数 $\cdot \det E = \text{係数} \cdot 1^n = \text{係数}$, が行列式の値.
- 行基本変形で, 簡約階段化までしなくても, A を上三角行列にできたら, 係数 $\cdot$ 対角成分の積が行列式の値.
- $\text{rank } A < n$ なら (例えば 0 だけの行が作れたら) $\det A = 0$.

L28-Q1

Quiz(行列式)

行基本変形で階段行列に直すことにより, 次の行列式を求めよう.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形による，行列式計算のアルゴリズム

入力: n 次正方行列 A ，出力: 行列式

行列式を $=$ でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す．

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本変形で (簡約) 階段形にしていく
- 許される手抜き方法
 - ▶ ピボット (0 ではない) は 1 にしてもしなくてもよい (簡約でなくてもよい)
 - ▶ ピボットの上側の成分はゼロにしなくてよい (簡約でなくてもよい)
 - ▶ ピボットのない列が現れたら，その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
 - ▶ 0 ばかりの行，列，定数倍の行，列が現れたら，その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
 - ▶ 上三角行列になった段階で終了
- 係数と，すべての対角成分の積を出力して終了

(慣れた人向け) 余因子展開を使ったり，残りの右下ブロックが 2×2 , 3×3 になったらサラスの公式を使ったりしてもよい．列基本変形を使ってもよい．

大注意 1 個の矢印に複数の操作: 逐次適用 (略記) はいいけど，
同時適用は間違った結果になる

線形代数☆演習 I(2025)L27

LearnMoodle 動画 行列式

復習：掃き出し法の概要

線形代数☆演習 I(2025)L21

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

- (1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
- (2) 零でない再左の列で, $R_{III}(R_3)$ によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持って行ってピボットにする
- (3) 持っていった非零成分 c を $R_I(R_2)$ ① $\times (1/c)$ で 1 にする
- (4) $R_{II}(R_5)$ ② $+ ① \times (-a)$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする
- (5) $R_{II}(R_5)$ ② $+ ① \times (-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
 - * これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(5) を「再帰的に」行う
 - * 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず 有限回の操作で終了して 簡約階段形に到達する

復習：掃き出し法 (簡略版)

線形代数☆演習 I(2025)L21

掃き出し法の概要 (簡略版)

行 (i) にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら,

- ① なるべく近い, ゼロばかりでない列を相手にする
- ② $\text{RIII}(R3)$ 必要なら $(i) \leftrightarrow (j)$ でゼロでない成分を行 (i) に持ってくる (ピボットにする)
- ③ $\text{RI}(R2)$ 必要なら $(i) \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
- ④ $\text{RII}(R5) \ (k) + (i) \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
- ⑤ $\text{RII}(R5) \ (k) + (i) \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

簡約階段形や逆行列を求める 対 行列式を求める

石村畑 線形代数 p.114

求めるもの	簡約階段形, 方程式の解, 逆行列	行列式の値
対象 つなぐもの 許される操作 ゴール 併用できる操作	行列 $(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet & & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & 0 & 1 \end{smallmatrix})$ → R のみ 簡約階段形	行列式 $\det(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \end{smallmatrix}), \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \end{smallmatrix} $ = R と C (上) 三角行列 余因子展開, サラスの公 式 (3×3), 行列式が 0 に なる十分条件

線形代数 I を通過した人は, 区別して完璧に実行できるべき手順.
レポート方式の trialL27 の表裏で対比して確認します.

L28-Q2

Quiz(行列式)

次の行列式 $\det(A)$ の値を, A を行基本変形で上三角行列にすることにより (余因子展開やサラスの公式は使わないで) 求めよう. 各ステップで利用した行基本操作を ① $\leftrightarrow$ ② のように書こう.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ここまで来たよ

27 数式処理システム Maple

28 行基本変形による行列式の計算

- 行列式
- 対角行列の復習

いまごろ対角行列の復習

定義 (対角行列 石村畑 線形代数 p.220 線形代数☆演習 I(2025)L07)

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ を対角成分という.

対角成分でない成分が 0 である正方行列

$(1 \leq \forall i, j \leq n \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ である正方行列 } A)$
を対角行列という.

命題 (対角行列の成分表示 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L09)

n 次の対角行列 D の成分 d_{ij} は, 対角成分 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ (ラムダ) とクロネッカーのデルタ記号 δ を用いて, 次のように書ける.

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

対角行列の積

命題 (対角行列の積)

線形代数☆演習 I(2025)L07

n 次の対角行列 A, B の対角成分をそれぞれ, $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, $\mu_i (i = 1, \dots, n)$ とする.

積 AB, BA はまた n 次の対角行列で, $AB = BA$ であり, 対角成分は $\lambda_i \cdot \mu_i (i = 1, \dots, n)$.

べき乗 A^n はまた n 次の対角行列で, 対角成分は...

石村畑 線形代数 p.49

A, B の成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とすると,

$$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad b_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$$

であり, AB の (i, j) 成分 c_{ij} は, 積の定義から,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{ik} \mu_k \delta_{kj} \\ &= \lambda_i \delta_{ij} \mu_j = \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \lambda_i \mu_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

復習と再解釈：対角行列の行列式と逆行列

命題 (対角行列の行列式の値 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L16)

対角行列（実は上三角行列・下三角行列も）の行列式は、対角成分の積である

命題 (対角行列の正則性・逆行列 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L09)

n 次の対角行列 D の対角成分を λ_i ($i = 1, \dots, n$) とする.

- $\exists i$ s.t. $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow D$ は正則でない
- $\forall i \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow D$ は正則である
 - ▶ このとき、 D^{-1} は n 次の対角行列で対角成分は $1/\lambda_i$ ($i = 1, \dots, n$).