

行列の成分表示による証明

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L29(2025-07-18 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-18 Fri 11:06 JST hig"

今日の目標

- 行列の成分表示による使った証明ができる

教科書に追加



- 実数の等式 $|\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix}| = |\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix}| = \dots =$ 行列式の値 で計算する.
- $1 \times |\begin{smallmatrix} \vdots \end{smallmatrix}|$ から始まるのは行基本変形計算機の都合なので, 答案では $1 \times$ は不要.
- 整数成分の行列式は, 計算途中で分数が出てくることはあるが, 最後は整数になるはず (余因子展開による定義を考えると).
- (この手の行列では) 成分 0 の誘惑に惑わされるより, 掃き出し法を忠実に実行するほうが便利で速い.

L28-Q1

Quiz 解答: 行列式

階段行列 (この場合は上三角行列) にする場合

$$\begin{aligned}
 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} & \xrightarrow{\text{②} + \text{①} \times (-\frac{3}{4})} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{③} + \text{②} \times (-1)} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{④} \leftrightarrow \text{③}} -1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = -60
 \end{aligned}$$

確認: 階段行列.

簡約階段形までする場合 (Teams に拡大できる画像)

$1 \times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \times \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 + 1 \times (-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3 + 2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{4 + 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \times \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 + 3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 + 3 \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{4 \times \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 + 4 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{替下三角行列}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-60 \times} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-60 \times} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= -60 \cdot 1^4 = -60$$

L28-Q2

Quiz 解答: 行列式

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}}{=} -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{上三角行列}}{=} -1 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = -60.$$

L28-Q3

Quiz(行列式)

次の行列式 $\det A$ の値を，掃き出し法のアルゴリズムに従って A を行基本変形で**簡約**階段行列にすることにより（余因子展開やサラスの公式は使わないで）求めよう．各ステップで利用した行基本操作を ① $\leftrightarrow$ ② のように書こう．

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここまで来たよ

28 行基本変形による行列式の計算

29 行列の成分表示による証明

- 上下三角・対角行列
- 証明の書き方

上三角行列, 下三角行列, 対角行列

石村畑 線形代数 p.50,p.220,p.234

定義 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

n 次正方行列 A, B の (i, j) 成分を a_{ij}, b_{ij} とする.

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (\forall i, j \ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix) $\Leftrightarrow (\forall i, j \ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix)
 $\Leftrightarrow (\forall i, j \ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$ 「対角成分でない成分はゼロ」
- A が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow (\forall i, j \ a_{ji} = a_{ij}) \Leftrightarrow {}^tA = A.$
- A が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow (\forall i, j \ a_{ji} = -a_{ij}) \Leftrightarrow {}^tA = -A.$

定義 (転置行列)

石村畑 線形代数 p.100

n 次正方行列 A, B の (i, j) 成分を a_{ij} を b_{ij} とする.

B が A の転置行列 $\Leftrightarrow {}^tA = B \Leftrightarrow (\forall i, j \ a_{ji} = b_{ij})$

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.

$P \Rightarrow Q$: P ならば Q , P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P : 仮定, Q : 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

対角行列

n 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D の (i, j) 成分を d_{ij} とすると、クロネッカーのデルタを使って

$$d_{\textcolor{red}{i}\textcolor{red}{j}} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

λ_j ($j = 1, \dots, n$) を **対角成分** という。

対角行列全体は、 n 次正方行列の中で、扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ)。

線形代数 II(後期), 代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー
単位行列は、 $\forall i \lambda_i = 1$ を満たす対角行列。

対角化

線形代数 II(後期)

ここまで来たよ

28 行基本変形による行列式の計算

29 行列の成分表示による証明

- 上下三角・対角行列
- 証明の書き方

L29-Q1

Quiz(行列の証明)

$n(\geq 2)$ 次正方行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とする.

A が上三角行列なら, A の $(2, 1)$ 成分は 0 であることを示そう.

証明「示そう」の書き方

「 P ならば R 」 「 P のとき R 」を示す

仮定 P

結論 R

よって仮定 P ならば
結論 R

仮定 P

よって「仮定 P を定義で書き直したもの」

「結論 R を定義で書き直したもの」

よって結論 R

よって仮定 P ならば
結論 R

仮定 P

よって「仮定 P を定義で書き直したもの」

(ギャップを埋める)

「結論 R を定義で書き直したもの」

よって結論 R

よって仮定 P ならば
結論 R

L29-Q2

Quiz(行列の証明)

n 次正方行列 A が対角行列ならば, A は上三角行列であることを示そう.
「対角行列は上三角行列であることを示そう」

P ならば R の証明 $P \Rightarrow R$ P とする $\vdots$ R よって $P \Rightarrow R$. P ならば (Q ならば R) の証明 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ P とする $\vdots$ Q とする $\vdots$ R よって $Q \Rightarrow R$ よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.結局, $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P \text{ かつ } Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.つまり「仮定 Q は前に持っていい」「 P と Q から R を示せばいい」

L29-Q3

Quiz(三角行列の和)

A, B が上三角行列ならば，和 $A + B$ も上三角行列であることを示そう．

L29-Q4

Quiz(上三角行列と対角行列)

(任意の正方行列 A に対して), A が上三角行列であるとき, A は対角行列か?

「上三角行列は対角行列か?」

- 「 P は成り立つか?」は, P が成立するか P の否定が成立するかを考え, 成立する方を証明する.
- 否定を示すには, 「上三角行列であり, かつ対角行列でない行列が存在すること」を言う.
 - ▶ 「存在すること」を言うにはひとつ具体例を挙げる

「成り立たない」ことの証明

$Q \Rightarrow R$ が成り立たないことを示すには、 $Q \Rightarrow R$ の否定を示す.

$Q \Rightarrow R$ の否定は「 Q である、かつ R でない」

$\forall x P(x)$ の否定は $\exists x (P(x) \text{ でない})$.

$\exists x (P(x) \text{ でない})$ を示すには、実際に「 $P(x)$ でない」 x の具体例をひとつ作ってみせればよい

このような x を **反例** (counter-example) という.

$\forall x Q(x) \Rightarrow R(x)$ の否定を示すには、

$Q(x)$ だけど $R(x)$ でない、実例 x をひとつ作ってみせればよい.

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

- 2025-07-30 水 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-L15 の出題計画をあわせたもの. 要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし. ただし, 災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2025-08-06).

成績評価

- TrialL29 は紙で対面
- TrialL30 は Moodle や Mobius (紙でなく解答して完了)
- (Trial 以外の) Mobius の問は mobius IH4.8 が最後. 2025-07-28 月 24:00 までを算入
- TrialL01-L15 の合計点と, 上の小テストの点数を比較し, 高いほうを採用します. Moodle「成績評価方法」参照.
- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2025-07-25 金までに LearnMoodle 欠席遅刻早退届 に提出.
- 2025-07-29 火に, すべての採点結果を公表することはできないかも