

高次元のベクトル・行列とその応用

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L30(2025-07-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-23 Wed 07:20 JST hig"

今日の目標

- 行列の成分表示を使った証明ができる (続)
- 規則的な成分の行列の計算ができる
- ベクトルで表現できるものの例が挙げられる



L29-Q1

Quiz 解答: 行列の証明

A を上三角行列とする.

定義より, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 \dots (*)$.

$i = 2, j = 1$ とすると, $i > j$ なので, $(*)$ より,

$$a_{21} = 0.$$

A の $(2, 1)$ 成分は 0.

よって, A が上三角行列なら, A の $(2, 1)$ 成分は 0 である.

L29-Q2

Quiz 解答: 行列の証明

A を対角行列とする.

A の (i, j) 成分を a_{ij} とすると, $\forall i, j (i \neq j) \ a_{ij} = 0 \dots (*)$

任意のペア $k > \ell$ とする.

このとき, $i = k, j = \ell$ として (*) を使うと, $k \neq \ell$ なので,
 $a_{k\ell} = 0$.

よって, $\forall k, \ell (k > \ell) \Rightarrow a_{k\ell} = 0$.

よって, A は上三角行列.

よって, A が対角行列ならば, A は上三角行列.

L29-Q3

TA Prob and Sol: 三角行列の和

A, B が上三角行列ならば, 和 $A + B$ も上三角行列であることを示そう.

略解

$A, B, C = A + B$ の (i, j) 成分を a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} とする

A, B を上三角行列とする.

よって $\forall i, j \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0, b_{ij} = 0. (*)$

任意の $k > \ell$ を考える.

$$c_{k\ell} \stackrel{\text{行列の和の定義}}{=} a_{k\ell} + b_{k\ell}.$$

ここで, $k = i, \ell = j$ として条件 (*) を使うと,

$$c_{k\ell} \stackrel{\text{条件 (*)}}{=} 0 + 0 = 0.$$

よって, $\forall k, \ell \quad k > \ell \Rightarrow c_{k\ell} = 0.$

よって, C は上三角行列.

よって, A, B が上三角行列なら, $A + B$ は上三角行列.

L29-Q4

Quiz 解答: 上三角行列と対角行列

そうとは限らない. 反例 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の $(1, 2)$ 成分は, $1 \neq 2$ だが $3 \neq 0$ であり, 対角行列の定義を満たさない.

ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用

- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

L30-Q1

Quiz(高次元の行列)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ の第 i 成分を v_ℓ , n 次正方行列の A の (ℓ, m) 成分を $a_{\ell m}$ とする.
ベクトル $v_\ell = 2^\ell$, 行列 $a_{\ell m} = \ell \cdot 3^m$ を考える.

- ① $n = 3$ とする. ベクトル v_ℓ , 行列 $a_{\ell m}$ を成分表示で具体的に書こう.
積 $A\vec{v}$ を求めよう.
- ② 一般の n に対して, 積 $\vec{u} = A\vec{v}$ の成分 u_ℓ を求めよう.

有限等比級数の和

$$\sum_{k=0}^n r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

v_ℓ というより関数 $v_x = v(x)$. 関数もベクトルと思える.

行列 $a_{\ell m}$ というより 2 変数関数 $a_{xy} = a(x, y)$,

微積分 II

積というより積分変換 $u(x) = \int a(x, y)v(y)dy$ と言ったほうがいいな～

フーリエ解析

L30-Q2

Quiz(高次元の行列)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ の第 i 成分を v_ℓ , n 次正方行列の A の (ℓ, m) 成分を $a_{\ell m}$ とする.
ベクトル $v_\ell = e^{-4\ell}$, 行列 $a_{\ell m} = \ell + e^{2m}$ を考える.

- ① $n = 3$ とする. ベクトル v_ℓ , 行列 $a_{\ell m}$ を成分表示で具体的に書こう.
積 $A\vec{v}$ を求めよう.
- ② 一般の n に対して, 積 $\vec{u} = A\vec{v}$ の成分 u_ℓ を求めよう.

ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用

- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

L30-Q3

TA Prob and Sol: 上三角行列と対角行列

A, B が n 次の上三角行列ならば, 積 AB も n 次の上三角行列か?

略解

成り立つ.

まず, n 次正方行列の積 $C = AB$ はまた n 次正方行列である.

A, B, C の (i, j) 成分を a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} とする.

仮定より, A, B は上三角行列である.

すなわち, $\forall i, j \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = 0$ (*)

$\ell > m$ とする (**)
 行列の積の定義より

$$\begin{aligned} c_{\ell m} &= \sum_{k=1}^n a_{\ell k} b_{km} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{\ell k} b_{km} + \sum_{k=\ell}^n a_{\ell k} b_{km} \\ &= (a_{\ell 1} b_{1m} + \cdots + a_{\ell \ell-1} b_{\ell-1m}) + (a_{\ell \ell} b_{\ell m} + \cdots + a_{\ell n} b_{nm}). \end{aligned}$$

第1項に含まれる $a_{\ell k} b_{km}$ は $\ell > k$. (*) より $a_{\ell k} = 0$.

第2項に含まれる $a_{\ell k} b_{km}$ は $k \geq \ell$. $\ell > m$ (**) より $k > m$ で, (*) より $b_{km} = 0$.

よって $\ell > m$ ならば, $c_{\ell m} = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{\ell k} \cdot 0 + \sum_{k=\ell}^n 0 \cdot b_{km} = 0$.

すなわち, $\forall \ell, m \quad \ell > m \Rightarrow c_{\ell m} = 0$.

定義より, C は上三角行列である.

よって, A, B が上三角行列なら AB も上三角行列.

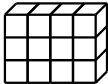
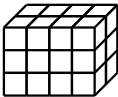
ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用

- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

ベクトル・行列・テンソル

$\vec{v} = (v_i)$ 3次元縦ベクトル	$A = (a_{ij})$ 3×4 行列	$T = (T_{ijk})$ 3階の $3 \times 4 \times 2$ テンソル	$T = (T_{ijkh})$ 4階の $3 \times 4 \times 2 \times 10$ テンソル
			?
ベクトル (vector) '行くもの' 例: 部屋の明暗の時間変化データ. 3=時間の長さ.	行列 (matrix) '母体' '土台' '母型' '活字' 白黒グレースケール画像. 縦横 3×4 ドット.	テンソル (tensor) '張力' RGB 画像	4 階のテンソル RGB 動画

- 工学では, **matrix** といえば 縦横のあるもの, のイメージの方が強くなった
- ベクトルは 1 階のテンソル, 行列は 2 階のテンソル (まあ), 3 階以上はぜんぶテンソル
- どれもプログラム上では (多次元) 配列 **array** で表現される.

一般相対性理論のアインシュタイン方程式

$g_{\mu\nu}$ 計量テンソル, $R_{\mu\nu}$ リッチテンソル, $T_{\mu\nu}$ エネルギー運動量テンソル

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用

- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

文字列のベクトル表現

文字 (キャラクタ) には通し番号が振られている (文字コード) 情報処理システム I

'a'=97, 'b'=98, 'c'=99, 'd'=100, ...

文字列 dogs□run は $\begin{pmatrix} d \\ o \\ g \\ s \\ \square \\ r \\ u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \\ 103 \\ 115 \\ 32 \\ 114 \\ 117 \\ 110 \end{pmatrix}$ というベクトルで表される.

1 文字の文字列のベクトルは、長さが違うだけ. 'a' と 'b' は, 'a' と 'c' より近い?

意味を考慮した文字列のベクトル表現

one-hot vector

単語ベクトル $\in \mathbb{R}^N$, N : 辞書に載ってる単語の個数.

単語に該当する成分だけ 1, 他は 0 にする.

各単語の意味を「独立」と考えてる. 長さ不使用.

$$\vec{v}_{\text{dogs}} = \begin{matrix} & 1) & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1253) & \end{matrix}, \vec{v}_{\text{run}} = \begin{matrix} & 1) & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 4858) & \end{matrix}$$

$N)$ $N)$

1253, 4858 は, dogs, run の単語番号 (辞書の 1253 番目に現れる).

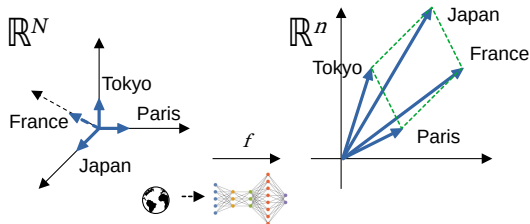
埋込み embedding

もっと低次元の $\mathbb{R}^n, n = 1000$ くらい？ で扱いたい.

次元圧縮 (機械学習)

意味を反映したベクトルの配置にしたい.

ニューラルネットワークに世の中のテキストを学習させた, いい感じの (線形でない) 埋込み写像 $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$



こうして作った f には,

$$\vec{v}_{\text{Paris}} - \vec{v}_{\text{Tokyo}} = \vec{v}_{\text{France}} - \vec{v}_{\text{Japan}}$$

のようないい性質を持たせられる. ニューラル自然言語処理

今後使われる線形代数

- 1年後期
 - ▶ 線形代数及び演習 II より抽象的に, より広い適用範囲
 - ▶ 微積分及び演習 II 2 変数関数 $y = f(x_1, x_2)$ の偏微分 $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, テイラー展開, 置換積分
 - ▶ データ分析 表=行列に記録された数値データの扱い
 - ▶ プログラミング及び実習 III (多次元) 配列はベクトル・行列・テンソル
- 2年前期
 - ▶ 数値計算法及び実習 (の一部) 行列のアルゴリズムを自分でプログラムとして書こう
- 2年後期
 - ▶ フーリエ解析及び演習 関数をベクトル, 変換を行列を思おう
 - ▶ 多変量解析及び演習 ‘ベクトルの確率’, ‘その標本である行列’
- 3年前期
 - ▶ 機械学習 I, II ニューラルネットワークのテンソルによる表現
- 3年後期
 - ▶ 微分幾何入門曲面の曲がり具合を表現するリーマン曲率 (4 階) テンソル R_{kji}^h

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

- 2025-07-30 水 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-L15 の出題計画をあわせたもの. 要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし. ただし, 災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2025-08-06).

成績評価

- TrialL30 は Moodle や Mobius (紙でなく解答して完了)
- trialL30-1 Mobius の Trial で. 期限 2025-07-28 月 23:59
- trialL30-2 Moodle 作文 期限 2025-07-30 水 20:00
- アンケートと学習履歴分析への同意をお願いします
- (Trial 以外の) Mobius の間は mobius IH4.8 が最後. 2025-07-28 月 23:59 までを算入
- TrialL01-L15 の合計点と, 上の小テストの点数を比較し, 高いほうを採用します. LearnMoodle 成績評価方法参照.
- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2025-07-28 月 23:59 までに LearnMoodle 欠席遅刻早退届 に提出.
- 2025-07-29 火に, すべての採点結果を公表することはできないかも

教科書は (少なくとも) 卒業まで売らないで

2025 年度後期 3 数理情報基礎演習, 2026 年度前期 確率統計 I でお会いしましょう (たぶん)