回帰分析

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L04(2019-10-14 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2019-10-14 Mon 06:40 JST hig"

今日の目標

- 2 次元データの相関係数が求められる
- 2 次元データから, 手で回帰直線が求められる
- Excel で代表値・分散・散布図・箱ひげ図・共分散・相関係数・回帰直線が得られる

L03-Q1

Quiz 解答:平均値・分散・標準偏差の 1 次式による変換

1.6m, 0.0025m^2, 0.05m.

L03-Q2

Quiz 解答:分散の意味

1

L03-Q3 Quiz 解答:標準得点と偏差値 平均値 $\overline{x} = 90$, 分散 $S_x^2 = 4$, 標準偏差 $S_x = 2$.

標準得点 $z = (87 - 90)/2 = -1.5$.

偏差値 $w = (-1.5) \times 10 + 50 = 35$.

L03-Q4 Quiz 解答:共分散 $\overline{x} = 4$, $s_x^2 = 4$, $s_x = 2$.

$\overline{y} = 13$, $s_x^2 = 122/5 = 24.4$, $s_y = \sqrt{122/5} = 4.94$.

共分散 $s_{xy} = \frac{1}{5}[(1-4)(5-13) + (3-4)(15-13) + (4-4)(14-13) + (5-4)(11-13) + (7-4)(20-13)] = 41/5 = 8.2$.

相関係数 $r = \dfrac{41/5}{2 \cdot \sqrt{122/5}} = 0.83$.

共分散 高校 数学 I 発展 岩薙林 確率・統計 §1.3(p.21)

相関の強さを相関係数 r という数で表す. 復習と準備

$$x \text{ の平均値} \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x \text{ の分散 } S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \times (x_i - \overline{x})$$

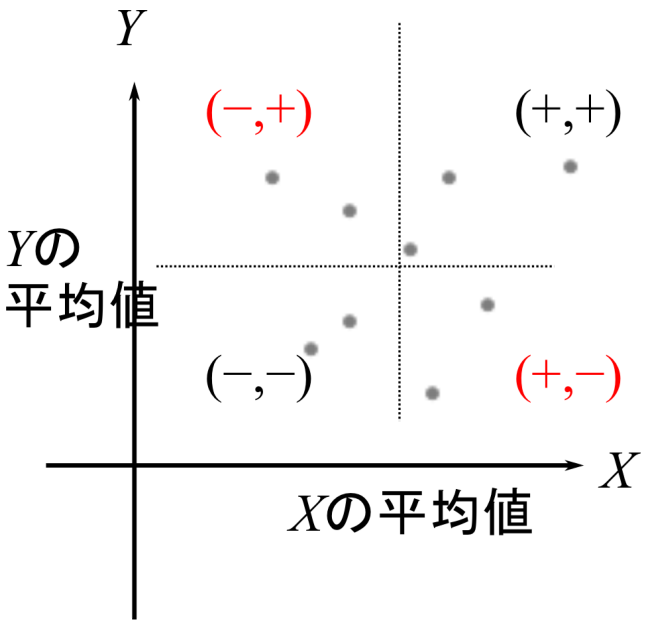
$\overline{y}, S_y^2$ も同様.

共分散 (covariance) 岩薙林 確率・統計 p.18

$$x, y \text{ の共分散 } S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \times (y_i - \overline{y})$$

$S_{xx} = S_x^2$ みたいな感じ.

共分散の意味 岩薩林 確率・統計 p.21



$(+,-) = ((x_i - \overline{x})$ の符号, $(y_i - \overline{y})$ の符号$)$.

共分散が正に/負に大きい $\Leftrightarrow$ 正の/負の相関が強い (?)

なぜなら

しか〜し (次のスライド)

相関係数 高校 数学 I 岩薩林 確率・統計 §1.3(p.22)

共分散は

- x, y の 1 次関数による変換で変わる

$$S_{bu+a\ dv+c} = bdS_{uv}.$$

岩薩林 確率・統計定理 1.7

- 単位を変えると [　　] → 比較に不便
- 広い範囲にばらついていたほうが [　　]

相関係数は, これらの影響を受けずに, 相関の強さをそのまま表す.

相関係数 (correlation coefficient) 岩薩林 確率・統計 (1.19)p.22

$$x, y \text{ の相関係数 } r = \frac{S_{xy}}{S_x \times S_y} = \frac{x, y \text{ の共分散}}{x \text{ の標準偏差} \times y \text{ の標準偏差}}$$

相関係数の性質

- $-1 \leq r \leq +1$ 岩薩林 確率・統計定理 1.6
- r が正負 $\Leftrightarrow$ 正負の相関
- $|r|$ が 0/1 に近い $\Leftrightarrow$ 相関が弱い/強い
- $r = 0 \Leftrightarrow$ ' 相関がない' しかし…
- $r = \pm 1 \Leftrightarrow$ 散布図の点が傾き正/負の一直線上 $\Leftrightarrow$ y は x の 1 次関数.
- r は x, y の 1 次関数による変換のもとで符号を除いて不変

$$r_{bu+a\ y} = \frac{S_{bu+a;y}}{\sqrt{S^2_{bu+a}}\sqrt{S^2_y}} = \frac{b \cdot S_{uy}}{|b|\sqrt{S^2_u}\sqrt{S^2_y}} = \frac{b}{|b|} r_{uy} = \pm r_{uy}$$

.

- 相関係数は

岩薩林 確率・統計例題 1.8, 問題 8(p.22), 第 1 章練習問題 4

L03-Q5

Quiz(相関係数の性質)

2 変量データ (x, y) の相関係数を考える.

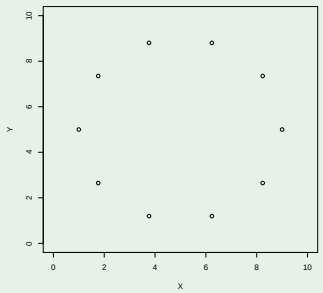
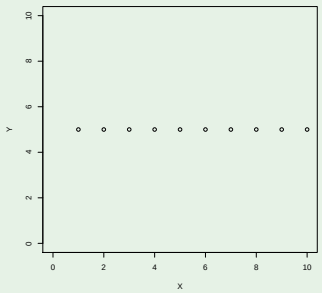
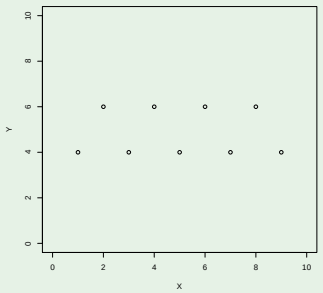
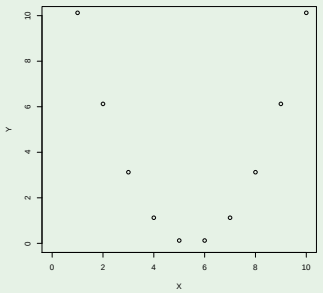
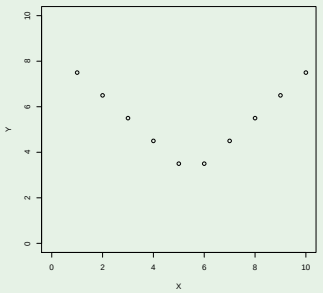
1. x に一斉に 5 を加えたとき, 相関係数はどうなる?
2. x を一斉に 2 倍したとき, 相関係数はどうなる?
3. y を一斉に -2 倍したとき, 相関係数はどうなる?
4. x, y をともに一斉に -2 倍したとき, 相関係数はどうなる?

だまされたくない相関の性質

L03-Q6

Quiz(相関係数)

次のうち, 相関係数 r がもっとも大きいものはどれ?

Anscombe(1973)

ここまで来たよ

3. データの変換 (標準得点, 偏差値)・2 次元データと相関

4. 回帰分析
   - Excel で統計
   - 回帰分析

Excel 使用の準備

統計ソフトウェア実習室にインストールされているのは

R 無料. オープンソース. 解説書が多い.
SPSS 伝統ある高級品.
Excel 表計算. 機能は限られ怪しいところもあるが, 普及率高い.
龍大では Office365 で無料.

起動 スタートボタン > Excel
準備 (データ分析の有効化)
ファイル > オプション > アドイン > Excel のアドイン > 設定 > データ分析 に
チェックを入れて OK する.
Excel によるグラフ描画 挿入 > グラフ > (グラフの種類)
題名や軸の変数名の追加
挿入 > グラフ > グラフのデザイン > グラフ要素を追加
使用するデータの調整
挿入 > グラフ > グラフのデザイン > グラフデータの選択

表計算ソフトウェア (Excel) による分析 高校 数学 I

メニューからデータ範囲を指定, または関数の引数にデータ範囲を指定.

	メニューベース	関数ベース
平均値, 分散, 標準偏差	データ > 分析 > データ分析 > 基本統計量 > 統計情報	平均値 average, 分散 var.p, 標準偏差 stdev.p, 最頻値 mode
四分位数	データ > 分析 > データ分析 > 順位と百分位数	中央値 median, 四分位数 quartile
ヒストグラム, 箱ひげ図	挿入 > グラフ > ヒストグラム, 箱ひげ図	グラフ
散布図	挿入 > グラフ > 散布図	
共分散, 相関係数	データ > 分析 > データ分析 > 共分散, 相関	covar=covariance.p, correl
回帰分析	データ > 分析 > データ分析 > 回帰分析	linest
クロス集計表	挿入 > テーブル > ピボットテーブル	

メニューベースのデータ分析 > 基本統計量の分散は, さらに $\frac{n-1}{n}$ 倍しないと, 「データの分散」var.p にならない. 別のセルに, '=9/10*セル名' と入力して求める.

メニューベースでデータ分析をするときの注意

- 列=縦, データを n 個並べる. 2 次元や p 次元の時は行=横 (線形代数と同じ) 方向に p 個を並べる.
  - 縦横を変えるときは, 形式を選択してペースト > 行列を入れ替える
- 「ラベル」は, 1 行目 (または 1 列目) に書かれている変数名 (身長) (データ (60 点) でなく). ラベルを範囲に含めるか含めないか, チェックボックスがあることが多い.
- $p = 2$ 次元の統計量である, 共分散 S_{xy} や相関係数 r_{xy} の出力は $p \times p$ の正方行列状.

$$\begin{matrix} S_{xx} = S_x^2 & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} = S_y^2 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} r_{xx} = 1 & r_{yx} \\ r_{xy} & r_{yy} = 1 \end{matrix}$$

ここまで来たよ

3. データの変換 (標準得点, 偏差値)・2 次元データと相関

4. 回帰分析
   - Excel で統計
   - 回帰分析

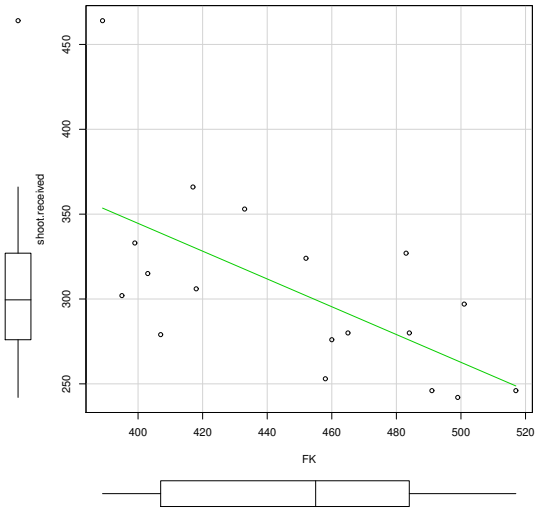
回帰分析

回帰 (regression), 直線回帰=単回帰分析=1 変数回帰分析 物理実験

2 変量データ (x, y) が
相関係数 $r = \pm 1$ に近い $\Leftrightarrow$ 散布図上のデータ点 (x, y) がほぼ直線に載っている

その直線 ( ) の式 $y = \beta x + \alpha$ を知りたい!

つまり β, 定数項 α を決めたい.



y: 目的変数 (従属変数)
x: 説明変数 (独立変数)
何でそんなことしたいの?

- 法則を見つけたい
- x から y を予測したい

回帰直線の決め方

1. 定規をあてて ‘真ん中’ を通るように
2. 最小 2 乗法で.

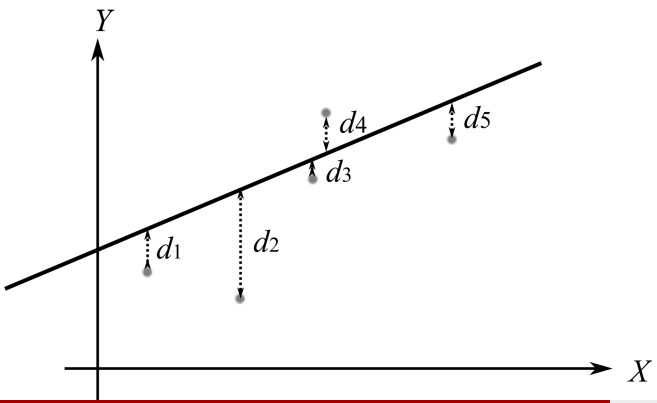
最小 2 乗法

直線からのずれの 2 乗 d^2 の合計

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta x_i + \alpha))^2$$

の最小条件 $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ で α, β を決める.

微積分 I



物理実験

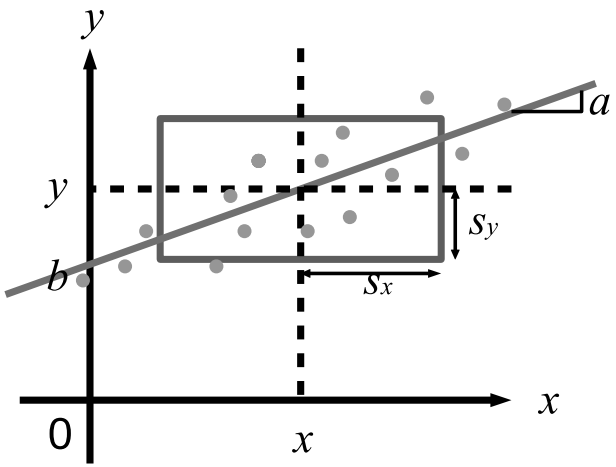
直線回帰の公式

回帰直線 岩薩林 確率・統計 (9.10)

x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ の平均値を $\overline{x}, \overline{y}$, 標準偏差を S_x, S_y, 相関係数を r とする. このとき回帰直線は,

$$y = \frac{r \times S_y}{S_x} \times (x - \overline{x}) + \overline{y} = \beta x + \alpha.$$

傾きは $a = \frac{r \times S_y}{S_x} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$, 切片は $b =$ (点 $(\overline{x}, \overline{y})$ を通るような値)



β: 回帰係数 (x を 1 だけ変えたときの y の変化量)
r^2: 決定係数 (あてはまりのよさ)
誤差 $L(\alpha, \beta) = N(1 - r^2)S_y^2$.

回帰直線の傾きのおぼえ方 I

広がり方

散布図上のデータ点の分布は, 横 $2S_x$, 縦 $2S_y$ $\rightarrow$ 傾き $\frac{S_y}{S_x}$ くらい?
しか〜し, 傾きには正負があるし, 相関がなかったら傾きを 0 にしたいので, 相関係数 r をかけ算しておく.

単位チェック

(x, y) の単位が (m,kg) だとする.
r は無次元. 単位無し.
左辺 y (kg).
右辺 $r \times \frac{S_y(\mathsf{kg})}{S_x(\mathsf{m})} \times x(\mathsf{m}) + b(\mathsf{kg})$
で, S_x/S_y かけると単位があう.

岩薙林 確率・統計例題 9.2, 9.3, §9 問題 3,4,5, §9 練習問題 1

L04-Q1

Quiz(回帰係数と回帰直線)

ある 2 変量データ (x, y) について次のことがわかっている.

x の平均値 $\overline{x}$	9
y の平均値 $\overline{y}$	-4
x の分散 s_x^2	49
y の分散 s_y^2	36
x, y の共分散 s_{xy}	-25
(x, y) のデータの個数 n	16

このとき, x を説明変数, y を目的変数とする回帰直線の式を, x, y の式で書こう. 整理しなくてよい.

メニューベースの回帰分析

データ > データ分析 > 回帰分析

入力

入力 Y 範囲 = 目的変数

入力 X 範囲 = 説明変数

出力

- 重相関 R = 相関係数の絶対値 $|r|$
- 重決定 R2 = 決定係数 r^2
- 切片 = 回帰直線の切片 α
- X 値 1(またはラベルで指定した変数名) = 回帰係数 β

連絡

- 次回はたぶん 3-202 講義室
- 2019-10-17 木昼 1-534 統計検定 2 級向け勉強会. 今回受験しない方もどうぞ.
- オフィスアワー木 6(1-539) 金昼 (1-542), Math ラウンジ (1-536/538)
- Trial 予告
- 来週は教科書 岩薩林 確率・統計 SS3.1,3.2 読んできて.

Moodle モバイルアプリ

で URL 指定

`https://note.math.ryukoku.ac.jp/moodle`