# 離散型確率変数

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L05(2019-10-21 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2019-10-21 Mon 08:17 JST hig"

今日の目標

- 離散型確率変数とは何か説明できる
- 離散型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値が計算できる

## L03-Q5
### Quiz 解答:相関係数の性質

1. かわらない.
2. かわらない.
3. $-1$ 倍になる
4. かわらない.

## L04-Q1
### Quiz 解答:回帰係数と回帰直線

$$y+4=\frac{-25\sqrt{36}}{\sqrt{49}\sqrt{36}\sqrt{49}}\times(x-9).$$

# ここまで来たよ

4 回帰分析

5 離散型確率変数
- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

# 高校の確率

## 高校数学でありがちな問題

トランプを 1 枚引く

| 結果 | 確率 |
|---|---|
| ♡1 | $\frac{1}{52}$ |
| ♡2 | $\frac{1}{52}$ |
| ⋮ | ⋮ |
| ♠13 | $\frac{1}{52}$ |
| 計 | 1 |

偶数のカードのでる確率は? $\frac{24}{52}$.

# 事象と確率 高校 数学 A 岩薩林 確率・統計 §2.1

集合の言葉で. 集合位相

試行 (トランプから 1 枚引く) を行うと根源事象 ($\heartsuit 1$ がでる) のどれか 1 つが起きる.

標本空間 $\Omega = \{\heartsuit 1, \ldots, \spadesuit K\}$ すべての根源事象を集めた集合.

事象 部分集合 $A = \{$ カード 1, カード 2, $\ldots\} = \{$ カード $x|$ 条件 $a(x)\} \subset \Omega$.

全事象 $\Omega \subset \Omega$.

空事象 $\emptyset \subset \Omega$.

補事象 $A^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus A$. $A$ が起きなかったという事象.

和事象 $A \cup B$ ‘または’.

積事象 $A \cap B$ ‘かつ’.

排反事象 「$A, B$ が排反事象」 $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. 同時に起きない.

## 事象の確率

「事象 $A$ の確率」 $=P(A) =$ 「条件 $a(X)$ が成立する確率」$=P(a(X))$

$\Omega$ =(トランプ全体) のとき,

- $P(\{\heartsuit 1, \ldots, \heartsuit K\}) = P(X$ が$\heartsuit) =$ ($\heartsuit$がでる確率)
- $P(\{\heartsuit 1\}) = P(X$ が$\heartsuit 1) =$ ($\heartsuit 1$ がでる確率)
- $P(\{\clubsuit 1, \ldots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \ldots, \spadesuit K\}) = P(X$ が黒札$) =$ ($X$ 黒札がでる確率)

## 授業時間中にはやらないこと

- 確率の公理 岩薩林 確率・統計 §2.2
- 確率に関する基本的定理 岩薩林 確率・統計 §2.2

## この授業ではやらないこと

- 測度

# ここまで来たよ

4 回帰分析

5 離散型確率変数
- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

# 離散型確率変数 岩薩林 確率・統計 §3.1

## 高校数学でありがちな問題

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が $x$ 個である確率は ？

$X$ が確率変数.
$X$ は離散型確率変数 離散型 $\approx$ 整数値
易しく言ったら, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. この元が $x$.

## 前回までとの関係

トランプ 1 セット $\neq$ なんとか坂
アイドル作成ゲームで, 新しいメンバーをスカウトする ボタンを押したら, CPU 内部でサイコロが振られて (=確率) 身長体重が決まって…を 49 回繰りかえしたら, 49 個からなる 2 変量データができた, みたいな関係.
推測統計まで行ったときに明らかになります.

| $x_k$ | 確率 $p_k = p(x_k) = P(X = x_k)$ |
|---|---|
| $\vdots$ | $0$ |
| $-1$ | $0$ |
| $0$ | $\frac{1}{10} = 1/{}_5\mathrm{C}_3$ |
| $1$ | $\frac{6}{10} = 2 \cdot 3/{}_5\mathrm{C}_3$ |
| $2$ | $\frac{3}{10} = 1 \cdot 3/{}_5\mathrm{C}_3$ |
| $3$ | $0$ |
| $\vdots$ | $0$ |
| 計 | $1$ |

言葉

確 率 分 布 (確 率 関 数)

岩薩林 確率・統計 (3.1)p.49

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$p_k = p(x_k)$.

確率分布の性質

$0 \leq p(x) \leq 1$. $\sum_x p(x) = 1$.

高校 数学 A ではこの表を作るまで, 高校 数学 B, 確率統計☆演習 I ではこの表ができた後を考える. ‘この表のとき, 赤玉の個数の母期待値は?’

# ここまで来たよ

4. 回帰分析

5. 離散型確率変数
   - 事象と確率
   - 離散型確率変数
   - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

# 関数 $g(x)$ の母期待値 高校 数学 AB 岩薩林 確率・統計 §3.2(3.3)p.52

## 関数 $g(x)$ の母期待値 $\mathrm{E}[g(X)]$

離散型確率変数 $X$ が確率分布 $p(x) = \cdots$ に従うとき,

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \times p(x)$$

$g$ は普通の関数. 例: $g(x) = x^2, \mathrm{e}^x$, (場合分けで書かれた関数), . . .

## 性質

$\mathrm{E}[1] = 1$. ($g(x) = 1$ と $\sum_x p(x) = 1$ から)

## 特に名前のついた量 (「母」で前回までと区別) 岩薩林 確率・統計 §3.2(p.54)

- 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$. ($g(x) = x$ってこと). ($x$ の) 母期待値とも
- 母分散 $= V[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$. ($g(x) = (x-\mu)^2$ってこと)
- 母標準偏差 $= \sqrt{V[X]}$

## 事象の確率 岩薩林 確率・統計なし

$A = \{x | a(x)\} \subset \Omega$ のとき，
事象 $A$ の確率 $P(A) =$ 条件 $a(X)$ が成立する確率 $P(a(X))$.

### 特徴関数

$$\text{関数 } \mathrm{I}_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

とすると，

$$P(A) = P(a(X)) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a(X)]}(X)]$$

$\boxed{\text{例}}$ $x \in \mathbb{Z}$ のとき，

$$\mathrm{I}_{[X^2 \leq 4]}(x) = \begin{cases} 1 & (-2 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

## L05-Q1

### Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X]$ を求めよう.
2. $X$ の母平均値を求めよう.
3. $X$ の母分散を求めよう.
4. $X$ の母標準偏差を求めよう.
5. 事象 $X \leq 1$ の確率を求めよう.

# 母平均値, 母分散の性質

## 母平均値の性質

高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.5)(3.6)p.54

$X$: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[g_1(X) + g_2(X)] &= \sum_x (g_1(X) + g_2(X)) \times p(x) \\
&= \mathrm{E}[g_1(X)] + \mathrm{E}[g_2(X)]. \\
\mathrm{E}[aX + b] &= \sum_x (ax + b) \times p(x) \\
&= \left( a \sum_x x \times p(x) \right) + b \sum_x p(x) = a\mathrm{E}[X] + b.
\end{aligned}$$

もちろん一般には $\mathrm{E}[g(X)] \neq g(\mathrm{E}[X])$, $\mathrm{E}[X^2] \neq (\mathrm{E}[X])^2$.
これ, $\sin(x^2) \neq (\sin(x))^2$ と同じくらい当たり前+だいじ.

## $g(X)$ の母期待値 = ($Y = g(X)$ の母平均値) 岩薩林 確率・統計 p.52

| $x$ | 確率 | $y = u(x)$ | 確率 |
|---|---|---|---|
| 0 | $p(0)$ | 3 | $g(3) = p(g(0))$ |
| 1 | $p(1)$ | 5 | $g(5) = p(g(1))$ |
| 2 | $p(2)$ | 7 | $g(7) = p(g(2))$ |
| $\vdots$ | | | |

### 母分散の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.9)p.55

$X$: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\mathrm{V}[aX+b] = a^2\mathrm{V}[X].$$

### 母分散の性質 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 (3.8)p.55

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$$

## L05-Q2

### Quiz(確率変数の変換)

確率変数 $X$ の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$\mathrm{V}[X] = 9, \quad \mathrm{E}[X] = 2.$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-X^2 + 2X - 3]$ を求めよう.
2. 確率変数 $Y = -2X - 3$ の母分散 $\mathrm{V}[-2X - 3]$ を求めよう.

## L05-Q3

### Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

# L05-Q4

岩薩林 確率・統計例 6(p.52), 例題 3.1(p.53)

# L05-Q5

岩薩林 確率・統計第 3 章演習問題 1

# 連絡

- 次回はたぶん 3-202 講義室
- オフィスアワー木 6(1-539) 金昼 (1-542), Math ラウンジ (1-536/538)
- Trial 予告
- 来週は多次元確率分布．教科書 岩薩林 確率・統計 §3.3 読んできて．

Moodle モバイルアプリ

で URL 指定

https://note.math.ryukoku.ac.jp/moodle