連続型確率変数

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L07(2019-11-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2019-11-11 Mon 16:49 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる 高校 数学 B
- 一様分布を例に, 母平均値・母分散・変数変換の意味が説明できる

L06-Q1

Quiz 解答:多変数の確率変数の期待値

1. $p(x,y) =$

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{4}{12}$	0	$\frac{5}{12}$

$g(x,y) = x^2 + \mathrm{e}^y =$

$y \backslash x$	1	2	3
0	$1^2+\mathrm{e}^0$	$2^2+\mathrm{e}^0$	$3^2+\mathrm{e}^0$
2	$1^2+\mathrm{e}^2$	$2^2+\mathrm{e}^2$	$3^2+\mathrm{e}^2$

$\mathrm{I}_{[XY\geq 2]}(X,Y) =$

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	0	0
2	1	1	1

$$\mathrm{E}[X^2+\mathrm{e}^Y] = (1^2+\mathrm{e}^0)0 + (2^2+\mathrm{e}^0)\tfrac{2}{12} + (3^2+\mathrm{e}^0)\tfrac{1}{12}$$
$$+(1^2+\mathrm{e}^2)\tfrac{4}{12} + (2^2+\mathrm{e}^2)0 + (3^2+\mathrm{e}^2)\tfrac{5}{12}$$

2. $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[XY\geq 2]}(X,Y)] = 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{2}{12} + 0\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot\frac{4}{12} + 1\cdot 0 + 1\cdot\frac{5}{12} = \frac{9}{12}.$

3. $$p_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 4/12 & (x=1) \\ 2/12 & (x=2) \\ 6/12 & (x=3) \\ 0 & (他) \end{cases} \qquad p_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 3/12 & (y=0) \\ 9/12 & (y=2) \\ 0 & (他) \end{cases}$$
4. (1 の別解) $\mathrm{E}[X^2 + \mathrm{e}^Y] = 2\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[\mathrm{e}^Y] =$ 周辺分布で計算.

L06-Q2

Quiz 解答:独立と限らない確率変数の母期待値

1. $\mathrm{E}[-2X + 3Y] = \mathrm{E}[-2X] + \mathrm{E}[3Y] = 5.$
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y] = \mathrm{E}[(-2X + 3Y)^2] - \mathrm{E}[-2X + 3Y]^2 =$ $(-2)^2\mathrm{V}[X] + 2(-2)(3)\mathrm{Cov}[X, Y] + 3^2\mathrm{V}[X] = 20 - 84 + 99 = 35.$

L06-Q3

Quiz 解答:2 つの離散型確率変数の母期待値・母平均値・母共分散・確率・独立性

1. 独立でない
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{6}{7} \cdot 3 = \frac{19}{7}$, $\mathrm{E}[Y] = \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 4 = \frac{22}{7}$,
3. $\mathrm{E}[XY] = \frac{1}{7} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{62}{7}$.
   $\mathrm{Cov}[X, Y] = \frac{62}{7} - \frac{19}{7}\frac{22}{7} = \frac{16}{49}$.

L06-Q4

Quiz 解答:2 つの独立な離散型確率変数の母期待値・母平均値・母共分散・確率

1. 独立である.
2. $\mathrm{E}[X] = 1 \cdot \frac{3}{12} + 3 \cdot \frac{9}{12} = \frac{30}{12}$. $\mathrm{E}[Y] = 2 \cdot \frac{4}{12} + 4\frac{8}{12} = \frac{46}{12}$
3. $\mathrm{E}[XY] = \frac{30}{12} \cdot \frac{46}{12}$. $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.
4. $\mathrm{E}[X^2] = 1^2 \cdot \frac{3}{12} + 3^2 \cdot \frac{9}{12} = \frac{84}{12} = 7$. $\mathrm{E}[X^2Y] = 7 \cdot \frac{46}{12}$.

L06-Q5
Quiz 解答:独立な確率変数の母期待値

1. X, Y は独立なので $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ であることに注意して, $\mathrm{E}[(-2X+3Y)(X+5Y)] = \mathrm{E}[-2X^2] + \mathrm{E}[-7XY] + \mathrm{E}[15Y^2] \overset{独立}{=} -2(\mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2) - 7\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + 15(\mathrm{V}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) = 240.$
2. X, Y は独立なので $\mathrm{V}[X+Y] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$ であることに注意して, $\mathrm{V}[-2X+3Y] \overset{独立}{=} \mathrm{V}[-2X] + \mathrm{V}[3Y] = 4\mathrm{V}[X] + 9\mathrm{V}[Y] = 119.$

ここまで来たよ

6. 多次元の確率分布と独立性
7. 連続型確率変数
   - 連続型確率変数
   - 一様分布

復習+ちょっと (x で書かれた確率関数) I

L07-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

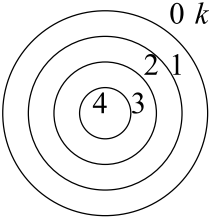
整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

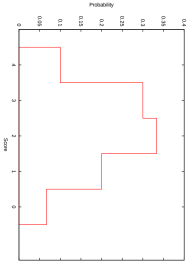
あるプレイヤーのダーツの得点確率

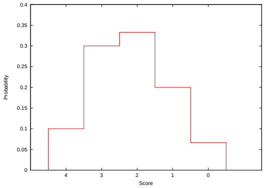
得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



離散型確率分布

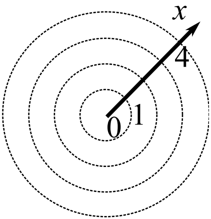
得点 s	確率関数 $f(s)$
4	0.1
3	0.3
2	0.3333
1	0.2
0	0.0667

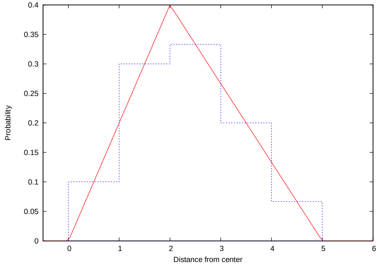




中心から x cm にあてる確率 岩薩林 確率・統計 §4.1

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).





$x = 0.5$cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $x = 1.0$cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

$\rightsquigarrow$ 点数の出やすさは x のある関数 $p(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $p(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは, 実数値をとり, 確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

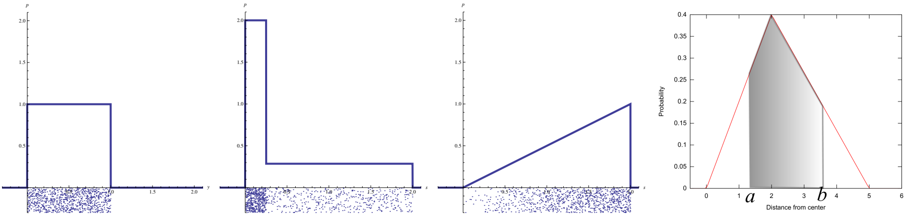
得点 x	確率 $p(x)$
0	0.1
1	0.3
$\vdots$	
x	$p(x)$

連続的

-
- $0 \le f(x)$ である. $f(x) \le 1$ とは限らない.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

確率密度関数の例



確率密度関数と確率 岩薩林 確率・統計 (4.1)

$$P(a \le X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値 岩薩林 確率・統計 §4.2

母期待値の定義 岩薩林 確率・統計 (4.8)

$$\text{離散型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot p(x)$$

$$\text{連続型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- 離散型と同じ公式が成立

k 次のモーメント $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 岩薩林 確率・統計 (4.9)

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

L07-Q2

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $X \geq +\frac{1}{4}$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{\sqrt{X}}]$ を求めよう.

$\mathrm{E}[2X+3], \mathrm{V}[2X+3]$ も夢想してみて.

岩薩林 確率・統計例題 4.2,4.3

確率密度関数から事象の確率を求める

$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[\text{条件}]}(X)]$$

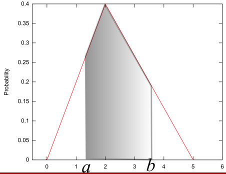
$$P(a \leq X < b) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a \leq X < b]}(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{I}_{[a \leq X < b]}(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \boxed{}$$

$$\text{全事象の確率} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{E}[1]$$

岩薩林 確率・統計第 4 章問題 1(p.79) 岩薩林 確率・統計第 4 章練習問題 1

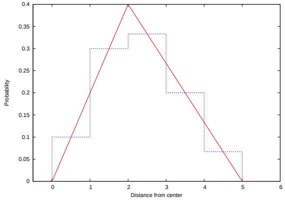
じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



$$\mathrm{I}_{[X\text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

$f(x)$ のグラフ



その 1:確率密度関数のグラフから

その 2

宝くじを何回も買うと, 1 回あたりの平均の賞金は,

待て チェビシェフの不等式, 大数の法則

多次元の連続型確率分布 岩薩林 確率・統計 §4.6

2 次元の確率密度関数 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$.

母期待値の定義

離散型確率変数 $\mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)\cdot p_{\mathrm{XY}}(x,y)$

連続型確率変数 $\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

X,Y が独立 $\Leftrightarrow f_{\mathrm{XY}}(x,y) = f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(y)$.

ここまで来たよ

一様分布 岩薩林 確率・統計例題 4.1(p.78)

一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c,d)$ の一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ に従うという.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L07-Q3

Quiz(一様分布)

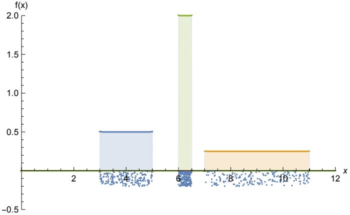
連続型確率変数 X が一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがう.

1. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

$Y = aX + b$ の意味 岩薩林 確率・統計標準化 (p.81)

X が 一様分布 $\mathrm{U}(r, s)$ にしたがうとき,
$Y = aX + b$ は 一様分布 $\mathrm{U}(ar + b, as + b)$ にしたがう.

$\mathrm{E}[aX + b] =$
$\sqrt{\mathrm{V}[aX + b]} =$



左から $X \sim \mathrm{U}(3, 5)$, $Z = \frac{1}{4}X + \frac{21}{4}$, $Y = 2X + 1$.

岩薩林 確率・統計例題 4.4

連絡

- 来週は 3-202 講義室
- 来週は正規分布．教科書 岩薩林 確率・統計 §4.5 読んできて．
- 予習復習問題の期限は 2019-11-11.
- 予習復習問題を，期限後も (再/初) 受験できるようにします．ピーナッツにはカウントしないけど，プチテスト準備に活用してね．
- Trial 予告
- 2019-11-20 水 4 特別講義 (全学年向け)
- オフィスアワー木 6(1-539) 金昼 (1-542)，Math ラウンジ (1-536/538)

学籍番号での LINE 公式アカウント登録

Gmail モバイルアプリ

プチテスト計画

プチテスト 2019-11-25 月. 1-609 実習室. 35 ピーナッツ相当.
以下の出題計画は最終的なものではありません. 2019-11-19 火に修正, 確定します. 予習復習問題のような PC(Moodle) による回答あり. Excel の使い方の問題は出題しません.

- データやグラフから平均値, 分散, 共分散, 標準偏差, 四分位数, 四分位範囲などを求めその意味を解釈する (L02)
- データやグラフや平均値分散から標準得点, 偏差値を求め, その意味を解釈する (文章題) (L03)
- データやグラフや平均値分散などから共分散, 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求めその意味を解釈する (L04)
- 1 次元の離散型確率変数について, 確率分布 (確率関数) から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L05)
- 1 次元,2 次元の確率変数の多項式について, 母平均値, 母分散から, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (L05,L06) 独立な 2 つの確率変数について計算する (L06) $\times n$ 問
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L07)

おすすめの準備方法 出題範囲や方式は毎年変わるので, 過去問題 (公開) 中心の準備はおすすめしません. 上の出題計画を参照して, 今年度の Trial, チーム課題, そのフィードバック, 予習復習問題を中心に準備することをおすすめします. Note Math Moodle の予習復習問題は, 点数はこれまでの最高点で固定されてますが, 練習のための再受験が可能です.