正規分布

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L08(2019-11-18 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2019-11-18 Mon 17:18 JST hig"

今日の目標

- 確率変数の変数変換の意味が説明できる
- 正規分布の母平均値・母分散・確率が積分や表で求められる

L07-Q1
Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率

1. $$\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X\leq 5]}(X)] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55}\mathrm{I}_{[X\leq 5]}(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x}{55} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$$
2. $$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x = \frac{\frac{1}{6}\cdot 10 \cdot (10+1)(2\cdot 10+1)}{55} = \frac{385}{55} = 7.$$
3. $$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x^2 - 7^2 = 55 - 7^2 = 6.$$

L07-Q2
Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1. $$P(X \geq \tfrac{1}{4}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[X\geq\frac{1}{4}]}(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 8x\, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$
2. k 次のモーメントは,
$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^k 8x\, \mathrm{d}x = \frac{2^3 \cdot 2^{-k-2}}{k+2}.$$
$\mathrm{E}[X^0] = 1$ が確認できる. $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{3}$.
3. $$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \tfrac{1}{8} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{72}.$$
4. $$\mathrm{E}[\tfrac{1}{\sqrt{X}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1/2} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^{-1/2} \cdot 8x\, \mathrm{d}x = \frac{2^{5/2}}{3}.$$

L07-Q3

Quiz 解答:一様分布

1. $\mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{d-c}\int_c^d x^k\ r dx = \frac{1}{k+1}\frac{d^{k+1}-c^{k+1}}{d-c}\int_c^d x^k\ \mathrm{d}x$. $\mathrm{E}[X] = \frac{c+d}{2}$.
2. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

ここまで来たよ

7 連続型確率変数

8 正規分布
- 確率変数の 1 次式による変換と標準化
- 正規分布

グラフの平行移動と拡大縮小

$y = f(x)$ のグラフを, y 軸を中心に横 (x 軸方向) に a 倍すると $y = f(\frac{x}{a})$.
さらに, 横 (x 軸方向) に b 平行移動すると $y = f(\frac{x-b}{a})$.
$y = x, y = x^2$ を例に考えてね.
以下では $z = \frac{x-b}{a}, x = az + b$ とおいてる感じです.

変数変換 $X = aZ + b, Z = \frac{X-b}{a}$ の意味 岩薩林 確率・統計例題 4.4

Z が確率変数のとき, $X = aZ + b$ も確率変数 ($a > 0, b$ 定数).

Z	X
$Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$	$X \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}a + b, +\sqrt{3}a + b)$
$f_{\mathrm{Z}}(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{cases} 1 & (\lvert z \rvert < \sqrt{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$	$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{cases} 1 & (\lvert \frac{x-b}{a} \rvert < \sqrt{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$
$\mathrm{E}[Z] = 0$	$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[aZ + b] =$
$\mathrm{V}[Z] = \frac{(2\sqrt{3})^2}{12} = 1$	$\mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[aZ + b] =$

L08-Q1

Quiz(一様分布)

連続型確率変数 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ に対して, $X = 2Z + 1$ を考える.

1. X の確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ とそのグラフを答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計例題 4.4(p.80)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X], \sigma > 0$ とする.
確率変数 Z を $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ と定めると, $\mathrm{E}[Z] = 1$, $\mathrm{V}[Z] = 1$ となる.

ここまで来たよ

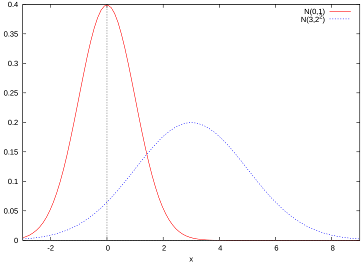
一般の正規分布 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 §4.5(4.23)

正規＝normal

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$ の確率密度関数

$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

b, a^2:パラメタ $(a > 0)$.



https://www.geogebra.org/classic#probability

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ の性質

難しいので, まず $b = 0, a = 1$ の場合を考える.
あるいは, a 倍, b だけ平行移動する前のものを考える.

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ の確率密度関数 岩薩林 確率・統計 (4.17)

$$f(z; 0, 1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

k 次のモーメント (k:自然数)

$$\mathrm{E}[Z^{2k-1}] = 0,$$

$$\mathrm{E}[Z^0] = 1,$$ 岩薩林 確率・統計 (4.19) 微積分 II

$$\mathrm{E}[Z^{2k}] = (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$$ 置換積分

母平均値 $\mathrm{E}[Z] = 0,$ 岩薩林 確率・統計 (4.20) 奇関数

母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1$ 岩薩林 確率・統計 (4.21)

標準正規分布の確率と $I(z)$ の数表

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z < d) = \int_c^d f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z'$$

.

不定積分は, 簡単な関数では書けない. そこで, 定積分を表にしてある.

岩薩林 確率・統計付表 1(p.227)

$$I(z) \overset{\text{定義}}{=} \int_0^z f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z'$$

$I(z)$ の性質

- $f(z; 0, 1^2)$ が偶関数より, $I(z)$ は奇関数: $I(-z) = -I(z), I(0) = 0$.
- $f(z; 0, 1^2) > 0$ より $I(z)$ は単調増加.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z = 1$ より, $I(+\infty) = \frac{1}{2} = -I(-\infty)$.

https://www.geogebra.org/classic#probability

$I(z)$ の数表 岩薩林 確率・統計付表 1(p.227)

任意の c, d に対して,

$$\begin{aligned} P(c < Z < d) &= \int_c^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_c^0 f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z + \int_0^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z \\ &= -I(c) + I(d) \end{aligned}$$

$I(z)$ $(z \geq 0)$ さえ知っておけば十分. それが 岩薩林 確率・統計付表 1(p.227)

L08-Q2

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

1. 確率 $P(Z < 0)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.
2. 確率 $P(-0.56 < Z < +1.23)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.

岩薩林 確率・統計例題 4.9(p.91), 問題 8(p.92), 問題 10(p.96)

ふたたび一般の正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して，$X = aZ + b$ を考える．$Z = \frac{X-b}{a}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^0] &= 1, \quad \text{微積分 II} \\
\mu = \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[aZ + b] = b, \\
\sigma^2 = \mathrm{V}[X] &= \mathrm{V}[aZ + b] = a^2, \quad \text{微積分 II}
\end{aligned}
$$

$$
f_{\mathrm{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \rightsquigarrow f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}
$$

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

母平均値 $\mathrm{E}[X] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は，

$$
f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.
$$

L08-Q3

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 3^2}}$$

にしたがう.

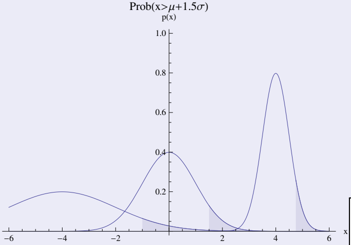
1. $f(x)$ のグラフを描こう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方 I

一般の正規分布の確率

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率は, 標準化 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ して求める.

$$P(c < X < d) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < \tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{d-\mu}{\sigma}) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < Z < \tfrac{d-\mu}{\sigma})$$



別説明

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき, 積分で $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$ とすると,

$$
\begin{aligned}
P(c < X < d) &= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\sigma \mathrm{d}z \\
&= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z < \frac{d-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

L08-Q4

Quiz(正規分布の確率)

X が母平均値 3, 母分散 4 の正規分布にしたがうとする．次を, $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう．さらに, 表を使って小数で書こう．

1. $X \geq 5$ となる確率
2. $+1 \leq X \leq 7$ となる確率

岩薩林 確率・統計 §4.5 例題 4.10,4.11, 問題 10, 第 4 章練習問題 5

連絡

- 来週は 1-609 講義室でテスト A1.
- 予習復習問題の期限は 2019-12-02.
- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できるようにしてます. ピーナッツにはカウントしないけど, テスト準備に活用してね.
- 2019-12-02 の Trial 予告
- 2019-11-20 水 4 特別講義 (全学年向け)
- オフィスアワー木 6(1-539) 金昼 (1-542), Math ラウンジ (1-536/538)

Gmail モバイルアプリ

学籍番号での LINE 公式アカウント登録

テスト A1 計画

テスト A12019-11-25 月. 1-609 実習室. 35 ピーナッツ相当.
以下の出題計画は最終的なものではありません. 2019-11-19 火に修正, 確定します.
予習復習問題のような PC(Moodle) による回答の予定です. Excel の使い方は出題しません. 正規分布は出題しません.
Trial の再放送が多いですが, 文章の多肢選択問題もあります.

- データやグラフから平均値, 分散, 共分散, 標準偏差, 四分位数, 四分位範囲などを求めその意味を解釈する (L02)
- データやグラフや平均値分散から標準得点, 偏差値を求め, その意味を解釈する (L03)
- データやグラフや平均値分散などから共分散, 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求めその意味を解釈する (L04)
- 離散型確率変数について, 確率分布 (確率関数) から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L05,L06)
- 1 次元,2 次元の確率変数 (の関数) について, 母平均値, 母分散から, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (L05,L06) 独立な 2 つの確率変数について計算する (L06) $\times n$ 問
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L07)

おすすめの準備方法 出題範囲や方式は毎年変わるので, 過去問題 (公開) 中心の準備はおすすめしません. 上の出題計画を参照して, 今年度の Trial, チーム課題, そのフィードバック, 予習復習問題を中心に準備することをおすすめします. Note Math Moodle の予習復習問題は, 点数はこれまでの最高点で固定されてますが, 練習のための再受験が可能です.