統計的仮説検定

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L12(2019-12-23 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2019-12-24 Tue 15:11 JST hig"

今日の目標

- 母分散未知のとき, 母平均値を区間推定できる
- 母平均値の t 検定ができる

L11-Q1

Quiz 解答:二項分布と正規分布と中心極限定理 $n = 400$ が大きいと考えると, 中心極限定理より, T は近似的に正規分布 $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ すなわち $\mathrm{N}(40, 6^2)$ $Z = \frac{T-40}{6}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう. よって, 求める確率は, $P(T > 31) = P(Z > -\frac{9}{6}) = Q(-\frac{3}{2}) - Q(\infty) = (1 - Q(\frac{3}{2})) - 0 = I(\infty) - I(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} + I(\frac{3}{2}) = 0.9332.$

L11-Q2

Quiz 解答:二項分布と正規分布と中心極限定理

1. 表の出る回数 T は, 二項分布 $\mathrm{B}(400, \frac{1}{10})$ にしたがう. よって, $\mathrm{E}[T] = 40$, $\mathrm{V}[T] = 36$ である.

2. 各回 i の表裏について, 確率変数

$$X_i = \begin{cases} 1 & (\text{表}) \\ 0 & (\text{裏}) \end{cases}$$

を考えると, X_i $(i = 1, \ldots, 400)$ は独立同分布にしたがい, $X_i \sim \mathrm{B}(1, \frac{1}{10})$, $\mu = \mathrm{E}[X_i] = \frac{1}{10}, \sigma^2 = \mathrm{V}[X_i] = \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})$ である. $T = X_1 + \cdots + X_{400}$ であり, $n = 400$ が大きいと考えると, 中心極限定理より, T は近似的に正規分布 $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ すなわち $\mathrm{N}(40, 6^2)$ にしたがう (それが二項分布の性質と思ってもよい).

3. $Z = \frac{T-40}{6}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう. よって, 求める確率は, $P(T > 31) = P(Z > -\frac{9}{6}) = Q(-\frac{3}{2}) - Q(\infty) = (1 - Q(\frac{3}{2})) - 0 = I(\infty) - I(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} + I(\frac{3}{2}) = 0.9332.$

L11-Q3

Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散既知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\mathrm{g}$. よって, 信頼係数 0.95 の信頼区間は
$$50 - 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $47.06 < \mu < 52.94$.
2. 同様に,
$$50 - 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $46.13 < \mu < 53.87$.

L11-Q4

Quiz 解答:母比率の区間推定

A 候補に投票したを $X = 1$, しなかったを $X = 0$ とする.

1. 標本比率は $\hat{p} = \frac{35}{50} = 0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.

2. X の母分散は $0.7 \times (1-0.7) = 0.21$ と推定する.
母比率 p の信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 0.7 - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} < &p < 0.7 + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} \\ 0.7 - 0.13 < &p < 0.7 + 0.13 \\ 0.57 < &p < 0.83 \end{aligned}$$

信頼係数 0.95 では当選ってことですね (放送用語「当選確実」で, 後であやまらなきゃいけない確率は 0.05 以下).

3. 母比率 p の信頼係数 0.99 の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 0.7 - 2.58 \times \sqrt{0.0042} < &p < 0.7 + 2.58 \times \sqrt{0.0042} \\ 0.7 - 0.17 < &p < 0.7 + 0.17 \\ 0.53 < &p < 0.87 \end{aligned}$$

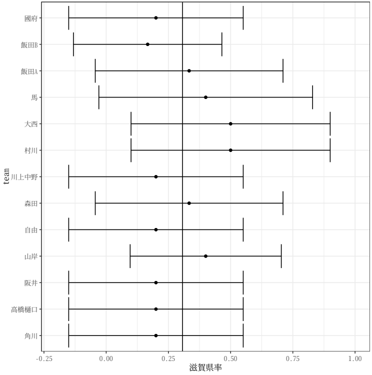
信頼係数 0.99 のほうが慎重な判断基準ですが, それでも当選ってことですね.

標本抽出 → 点推定の結果

母集団=回答者全体, 母集団サイズ=75
身長の母平均値=169.3cm, 身長の母分散=72.9cm^2, 滋賀県高校の母比率=0.31.
標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 S^2, 標本比率 p, 標本サイズ N

team	$\overline{X}$(cm)	S^2(cm^2)	p	N
國府	168.80	20.700	0.20000	5
飯田 B	170.17	95.367	0.16667	6
飯田 A	170.33	90.667	0.33333	6
馬	168.40	58.300	0.40000	5
大西	166.83	240.567	0.50000	6
村川	172.00	49.600	0.50000	6
川上中野	169.40	36.300	0.20000	5
森田	169.83	50.167	0.33333	6
自由	169.80	147.200	0.20000	5
山岸	170.30	92.900	0.40000	10
阪井	165.00	30.000	0.20000	5
高橋樋口	166.60	107.800	0.20000	5
角川	171.40	33.800	0.20000	5

信頼係数 $1-\alpha=0.95$ 信頼区間



ここまで来たよ

11 中心極限定理・正規近似・区間推定
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散未知)

12 統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散未知) 岩薩林 確率・統計 §7.1

μ はわからないのに σ^2 がわかってるケースはあまりない. ふつうはどちらもわからない.
σ^2 のかわりに不偏標本分散 S^2 (確率変数) を使っちゃいたい.
母集団が正規分布のときは, 使っちゃた量 $T = \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$ が, 正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ からちょっとずれた 自由度 $n-1$ の Student の t 分布にしたがうことが知られている.

母集団が厳密に正規分布にしたがわなくても近似的に正しいことが多い.

自由度 k の t 分布 t_k 岩薩林 確率・統計 §5.5

- 自由度 $k \to +\infty$ で $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に一致する.
- 自由度 k が小さいとき, $\mathrm{N}(0, 1^2)$ より低く広い.

$$\text{確率密度関数 } f_k(x) = A_k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}x^2\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

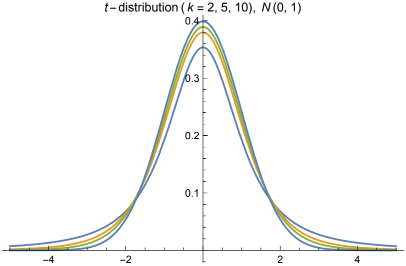
t 分布表 岩薩林 確率・統計付表 2

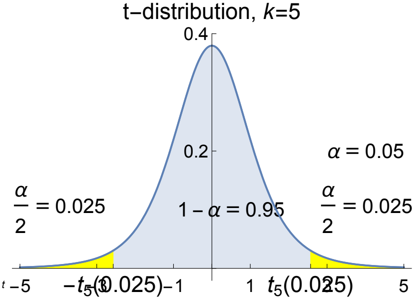
上側確率 $\alpha = 0.025, 0.005$, 自由度 k に対して, $\alpha = P(T > t_k(\alpha))$ となる $t_k(\alpha)$ の値の表.

https://www.geogebra.org/classic#probability

$t_k(0.025) \to 1.960, t_k(0.005) \to 2.576\ (k \to +\infty)$.

岩薩林 確率・統計図 5.8(p.128)





母平均値の信頼区間 (母分散未知) 岩薩林 確率・統計定理 7.1(7.3)

(母分散未知の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, ?^2)$ にしたがう母集団から, サイズ n の標本を得たとき, 母平均値 μ の 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\overline{x} - t_{n-1}(\alpha/2) \times \sqrt{s^2/n} < \mu < \overline{x} + t_{n-1}(\alpha/2) \times \sqrt{s^2/n}.$$

ただし, $\overline{x}$:標本平均値, s^2:不偏標本分散, n: 標本サイズ, $t_{n-1}(\alpha/2)$: 自由度 $n-1$ の t 分布の上側確率が $\alpha/2$ となる点 (表から求める).

L11-Q5

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知))

あるドーナツ製造マシンが製造するドーナツの重さ Xg は, 正規分布にしたがう確率変数である
製造された 4 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\text{g}, 52\text{g}, 47\text{g}, 50\text{g}.$

1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
2. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

岩薩林 確率・統計例題 7.1(p.158), 問題 1(p.158) 第 7 章練習問題 1(2)

ここまで来たよ

11 中心極限定理・正規近似・区間推定
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散未知)

12 統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

推定と検定

点推定 μ は値 xx と推定する

区間推定 μ は値 yy と値 zz の間と推定する (信頼係数 $1-\alpha$ で)

仮説検定 μ は値 xx と差がある $\boxed{}$ (有意水準 α で)

$=\boxed{}$

痕検査薬/試験紙

あるドーナツ製造器は，重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという．しかし，5 個買ってみたら，みんな軽めな感じ．これ，本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

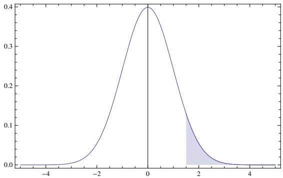
ある学習法を使ってるある生徒の，毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点．自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は $\cdots$．自分の方法は優

検定はだいたいこんな考え方

この確率変数は, 正規分布 $\mathrm{N}(10, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 10$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. サイズ 4 のサンプルを抽出したところ,

$$9, 12, 12, 15$$

だった. $\rightarrow$ サンプルサイズ $N = 4$, 標本平均値は 12



確率 α(=有意水準) でしか起きないようなまれなことが起きたら (検定統計量が棄却域にはいったなら)
おかしいと判定する (帰無仮説を棄却する)

帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い. 標本サイズが小さくても Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する
検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいったら) 帰無仮説 (=背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)
帰無仮説を棄却しない
実験失敗 (背理法使おうとした矛盾導けなかった). 何も言えない.

ここまで来たよ

11 中心極限定理・正規近似・区間推定
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散未知)

12 統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

レポートや論文での検定の書き方

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．

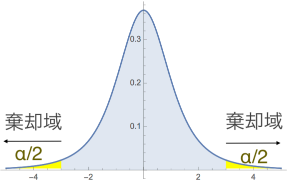
1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「‘y 不等号 (境い目)’ より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である/とはいえない」

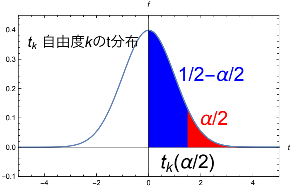
正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

母平均値の両側 t 検定 岩薩林 確率・統計定理 7.2(p.159)

前提 母集団が正規分布にしたがう

1. 有意水準 $\alpha = 0.01 \text{or} 0.05$ で母平均値の両側 t 検定
2. 帰無仮説:母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説:$\mu \neq \mu_0$.
3. 検定統計量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
4. T の実現値 t を標本平均値, 不偏標本分散, サンプルサイズから計算
5. 棄却域 $|t| > t_{n-1}(\alpha/2)$.
6. 結論





L12-Q1

Quiz(母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ は，正規分布にしたがうことがわかっている．母平均値は $57\mathrm{g}$ だと思っていたが，きょう 5 個製造したところ，下のようだった．
$52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 53\mathrm{g}, 48\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$
本当にドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ の母平均値は $57\mathrm{g}$ なのだろうか．統計的仮説検定を行って判定しよう．

重さは負にならないし，正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが，ここは練習ってことで．世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが，数理の人はおかしさを認識できるように．

岩薩林 確率・統計例題 7.2(p.159)，問題 2(p.160)

L12-Q2

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには, ドーナツ販売開始前には, 9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた. ドーナツ販売開始後の 4 日間, 来店客数は次の通りだった. $204, 208, 188, 200$

来店者数は正規分布にしたがうと考える. ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 0.05 で考える.

L12-Q3

理工学部生の平均身長に関する統計的検定

日本の大学生の平均身長は 160cm であると耳にした (←教員の捏造). 理工学部生の平均身長は, これと異なるという仮説を立証したい.
理工学部生全体 (母集団) の身長が正規分布にしたがうとして, 自分のチームのデータから, 統計的仮説検定で立証を試みよう.

連絡

- 2020-01-20 月 1 テスト B1. 45 分, PC 受験の予定. 持込不可. 教科書の p. xii–xv のコピーを配布.
- 2020-01-27 月 1(定期試験期間) テスト A2,B2 実施. A1,B1 と同等の評価内容.
- 成績の 70 ピーナッツ分$=\min(\max(A1, A2), \max(B1, B2))$.
- 予習復習問題は 2020-01-06 まで, 期限後も (再/初) 受験できるようにしてます. ピーナッツにはカウントしないけど, テスト準備に活用してね.
- 2019-01-06 の Trial 予告
- 2019-01-06 は統計的仮説検定. §§6.1,7.1,7.3 読んできてね.
- オフィスアワー木 6(1-539) 金昼 (1-542), Math ラウンジ (1-536/538)

進路

- 学外実習/インターンシップ: 春休みや夏休みには, 2 週間くらいの現場での実習に行こう.
- キャリア形成補助金:東京や遠隔地のインターンシップに行くための旅費 5 万円/年間. 2020-02-29 が年度切替.
- 理工学会 学会聴講補助: 学会に出席して勉強するための学会参加費 1 回 1 万円/年間. 随時.
- 大学院進学のための学力認定試験: 2020-02-15 土. 2 年生も受験可能. 申込は樋口に.

`https://wiki.math.ryukoku.ac.jp` (全学認証)

学籍番号での LINE 公式アカウント登録

GeoGebra 確率電卓

`https://www.geogebra.org/classic#probability`