統計的仮説検定—母平均値の両側・片側検定

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習　L14(2021-01-09 Sat)

最終更新: Time-stamp: "2021-01-06 Wed 20:41 JST hig"

今日の目標

- 統計的仮説検定を説明できる
- 母平均値の両側 t 検定ができる　岩薩林 確率・統計 §7.1
- 母平均値の片側 t 検定ができる　岩薩林 確率・統計 §7.1

L13-Q1

Quiz 解答:母分散の区間推定

標本サイズは $n=9$, 自由度は $9-1$, 母分散 σ^2 の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\times S^2 <&\sigma^2 < \frac{n-1}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\times S^2\\ \frac{8}{17.53}\times 72 <&\sigma^2 < \frac{8}{2.180}\times 72\\ 32.85 <&\sigma^2 < 264.2\end{aligned}$$

L13-Q2

Quiz 解答:カイ二乗分布の確率と $\chi^2_k(\alpha)$

1. $z(0.025) = t_\infty(0.025) = 1.960$
2. $z(0.025) = -z(0.025) = -1.960$
3. $t_{40}(0.025) = 2.021.$

4. $t_{40}(1-0.025) = -t_{40}(0.025) = -2.021.$

L13-Q3

Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $\overline{X} = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $S^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$. t 分布表から 自由度 $k = n-1 = 3$ の $t_3(0.05/2)$ を参照して, 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{14}{3}/4} < \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{14}{3}/4}.$$

2. 同様に, t 分布表から 自由度 $k = n-1 = 3$ の $t_3(0.01/2)$ を参照して,

$$50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{14}{3}/4} < \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{14}{3}/4}.$$

L13-Q4

Quiz 解答:t 分布の確率と $t_k(\alpha)$

1. $z(0.025) = t_\infty(0.025) = 1.960$
2. $z(0.025) = -z(0.025) = -1.960$
3. $\chi_1^2(0.05) = 3.8415.$
4. $\chi 11 - 0.05 = 0.000982.$

よく考えると, $(t_\infty(0.05/2))^2 = 1.960^2 = 3.8415 = \chi_1^2(0.05)$ が成立する.

ここまで来たよ

13 母分散・母平均値の区間推定

14 統計的仮説検定—母平均値の両側・片側検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の片側 t 検定

推定 (estimation) と検定 (test)

点推定 μ は値 xx と推定 岩薩林 確率・統計 §6.1

区間推定 μ は値 yy と値 zz の間と推定 (信頼係数 $1-\alpha$ で) 岩薩林 確率・統計 §6.2

仮説検定 μ は値 xx と差がある と, (時々) 断言 (有意水準 α で)
= 見逃すこと多いけど発色したら正しい (α で), 血痕試験紙 岩薩林 確率・統計 §6.3

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, 違う感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は ⋯. 自分の方法は優れていると言いたい.

検定はだいたいこんな考え方 岩薩林 確率・統計 §6.3

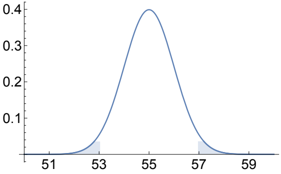
確率変数 X は, 正規分布 $\mathrm{N}(55, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 55$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. サイズ 4 の標本を抽出したところ,

$$54, 57, 57, 60$$

だった. → 標本サイズ $N = 4$, 標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{4}(X_1 + \cdots + X_4) = 57$.

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(55, 2^2/4)$.

確率 α(=有意水準) でしか起きないようなまれなことが起きたら (検定統計量 $\overline{X}$ が棄却域にはいったなら)
おかしいと判定する (帰無仮説を棄却する)



帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズを大きくできないことが多い. 小さくても Yes/No の結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する reject
検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいったら) 帰無仮説 (=背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)
帰無仮説を棄却しない accept
実験失敗 (背理法使おうとしたけど矛盾導けなかった). 何も言えない (発色しなかった)

ここまで来たよ

L14-Q1

Quiz(母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は 55g だと言われていたが疑っている. きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.
$50\mathrm{g}, 50\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 46\mathrm{g}, 48\mathrm{g}.$
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig の母平均値が 55g と異なるかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう.

一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

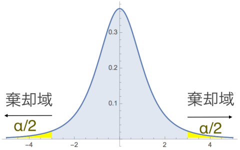
1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「'y 不等号 (境い目)' より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である/とはいえない」

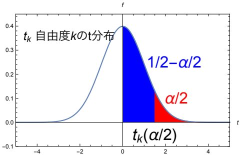
正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

母平均値の両側 t 検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.2(p.159)

前提 母集団が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \text{何か})$ にしたがう．

1. 有意水準 α で母平均値の両側 t 検定を行う．
2. 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする．
3. 帰無仮説のもとで, 検定統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう．
4. T の実現値 t を標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 S^2, 標本サイズ n から計算すると $t = \cdots$.
5. 棄却域は $|t| > t_{n-1}(\alpha/2)$ である．
6. (結論) 帰無仮説を棄却する/できない, 母平均値は $\mu \neq \mu_0$ と結論する/できない．





L14-Q1

Quiz 解答:母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55$g に等しい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq \mu_0$」とする.
3. サイズ n の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n-1$ の t 分布に従う.
4. この標本の実現値は, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{49-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
5. t 分布表より, 棄却域は $t_4(0.05/2) = 2.776 < |t|$.

6. t の実現値は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.
(注: このことを, 「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

重さは負にならないし, 正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが, ここは練習ってことで. 世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが, 数理の人はおかしさを認識できるように.

岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159), 問題 2(p.160)

L14-Q2

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには，ドーナツ販売開始前には，9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた．ドーナツ販売開始後の 4 日間，来店客数は次の通りだった．$204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える．ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 0.05 で考える．

ここまで来たよ

13 母分散・母平均値の区間推定

14 統計的仮説検定—母平均値の両側・片側検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の片側 t 検定

L14-Q3

Quiz(母平均値の片側検定 (母分散未知)=片側 t 検定)

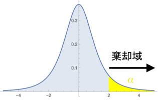
あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig は, 正規分布にしたがうことがわかっている. もともと母平均値は 55g に調整されていたが, 1 個あたりの重さを減らすはずの自己流調整を行った.
その後 5 個製造したところ, 下のようだった.
$55\mathrm{g}, 54\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}.$
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig の母平均値が 55g より本当に小さくなったかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう.

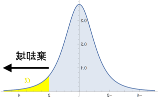
正規分布にしたがう母集団の母平均値の片側 t 検定

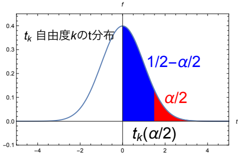
母平均値の片側 t 検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.2(p.159)

前提 母集団が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 何か)$ にしたがう.

1. 有意水準 α で母平均値の片側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$ とする.
3. 帰無仮説のもとで, 検定統計量 $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
4. T の実現値 t を標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 S^2, 標本サイズ n から計算すると $t = \cdots$.
5. 棄却域は $t > t_{n-1}(\alpha) (t < t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha))$ である.
6. (結論) 帰無仮説を棄却する/できない, 母平均値は $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$ と結論する/できない.

片側 

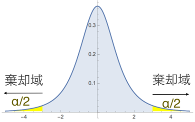
片側 

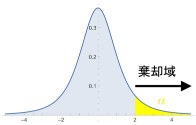


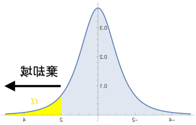
片側検定と両側検定 岩薩林 確率・統計 p.150

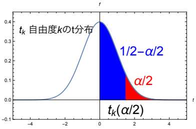
- 片側・両側検定の帰無仮説 $\mu = \mu_0$.
- 片側 t 検定の対立仮説 $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$
- 両側 t 検定の対立仮説 $\mu \neq \mu_0$

片側検定では，どちらか片側だけに確率=面積 α の棄却域ができる．実現値がここにはいったら帰無仮説を棄却.
両側検定のときは，両側に確率=面積 $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる．実現値がいずれかにはいったら帰無仮説を棄却.

両側


片側


片側




L14-Q3

Quiz 解答:母平均値の片側検定 (母分散未知)=片側 t 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 正規分布の母平均値に対する片側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\text{g}$ より大きい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu < \mu_0$」とする.
3. サイズ n の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n-1$ の t 分布に従う.
4. この標本の実現値は, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{53-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{13}{5-1}}} = 4\sqrt{5/13} = -2.4807.$
5. t 分布表より, 棄却域は $t_4(0.95) = -t_4(0.05) = -2.132 > t.$

6. t の実現値は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 55g より小さい, と結論する.