条件付き確率とベイズの定理

樋口さぶろお　`https://hig3.net`

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L05(2021-05-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-05-08 Sat 19:10 JST hig"

今日の目標

- 条件付き確率 岩薩林 確率・統計 §2.3, p.59, 同時確率分布, 周辺分布の間の計算ができる
- ベイズの定理 岩薩林 確率・統計 p.42 で, 2 つの条件付き確率の間の計算ができる

L04-Q1

Quiz 解答:多変数の確率変数の期待値

1. $p(x,y) =$

$y\backslash x$	1	2	3
0	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{4}{12}$	0	$\frac{5}{12}$

$g(x,y) = x^2 + \mathrm{e}^y =$

$y\backslash x$	1	2	3
0	$1^2+\mathrm{e}^0$	$2^2+\mathrm{e}^0$	$3^2+\mathrm{e}^0$
2	$1^2+\mathrm{e}^2$	$2^2+\mathrm{e}^2$	$3^2+\mathrm{e}^2$

$$\mathrm{E}[X^2+\mathrm{e}^Y] = (1^2+\mathrm{e}^0)0 + (2^2+\mathrm{e}^0)\tfrac{2}{12} + (3^2+\mathrm{e}^0)\tfrac{1}{12}$$
$$+(1^2+\mathrm{e}^2)\tfrac{4}{12} + (2^2+\mathrm{e}^2)0 + (3^2+\mathrm{e}^2)\tfrac{5}{12}$$

2. $\mathrm{I}_{[XY\geq 2]}(X,Y) =$

$y\backslash x$	1	2	3
0	0	0	0
2	1	1	1

$$\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[XY\geq 2]}(X,Y)] = 0\cdot 0 + 0\cdot\tfrac{2}{12} + 0\cdot\tfrac{1}{12} + 1\cdot\tfrac{4}{12} + 1\cdot 0 + 1\cdot\tfrac{5}{12} = \tfrac{9}{12}.$$

3.

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/12 & (x = 1) \\ 2/12 & (x = 2) \\ 6/12 & (x = 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} 3/12 & (y = 0) \\ 9/12 & (y = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

4. (1 の別解) $\mathrm{E}[X^2 + \mathrm{e}^Y] = 2\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[\mathrm{e}^Y] =$ 周辺分布で計算.

L04-Q2

Quiz 解答:独立と限らない確率変数の母期待値

1. $\mathrm{E}[-2X + 3Y] \overset{\text{E5}}{=} \mathrm{E}[-2X] + \mathrm{E}[3Y] \overset{\text{E3}}{=} -2\mathrm{E}[X] + 3\mathrm{E}[Y] = 5.$
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y] \overset{\text{V1}}{=} \mathrm{E}[(-2X + 3Y)^2] - \mathrm{E}[-2X + 3Y]^2 \overset{\text{E4}}{=}$
   $\mathrm{E}[(-2)^2X^2] + \mathrm{E}[2(-2)3XY] + \mathrm{E}[3^2Y^2] - (\mathrm{E}[-2X] + \mathrm{E}[3Y])^2 \overset{\text{E3,V1,C1}}{=}$
   $(-2)^2\mathrm{V}[X] + 2(-2)(3)\mathrm{Cov}[X, Y] + 3^2\mathrm{V}[X] = 20 - 84 + 99 = 35.$

L04-Q3

Quiz 解答:独立と限らない多次元の連続型確率変数

1. $\frac{459}{40}$
2. $\frac{7}{30}$

ここまで来たよ

同時確率分布と周辺分布 岩薩林 確率・統計 §3.3

X, Y 確率変数

同時確率分布

$p(x,y) = P(X = x$ かつ $Y = y) =$

$y\backslash x$	158	160	165
45	3/8	0	1/12
50	1/8	1/3	1/12

コンマの前が X, 後ろが Y の値. はっきりさせるには $p_{\mathrm{XY}}(x,y)$ と書いてもいい.

周辺分布 $p_{\mathrm{X}}(x) = P(X = x), p_{\mathrm{Y}}(y) = P(Y = y)$

意味 確率の小計, X の値を無視した Y の値だけの分布, その逆

大注意 表の縦横, 変数名 X, Y には意味がなく, 問題などでは入れ替えたりする.

条件付き確率 岩薩林 確率・統計 §2.3

条件付き確率の定義 岩薩林 確率・統計 (2.12)

条件 (事象) A のもとでの, 事象 B の条件付き確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

縦棒「|」の前後は不平等: P(確率を考える事象 | 条件の事象)
$P(B|A) \neq P(A|B), \neq P(A \cup B)$.

意味 **A が起きる場合に限定した, B が起きる確率**

縦棒の前だけ見る (縦棒の後ろを固定する) と, ただの確率

離散型確率変数に対する条件付き確率

事象 $B \leftrightarrow$ 事象 $Y = 50$
同時確率分布

$p(x, y) = P(X = x \text{ かつ } Y = y) =$

$y \backslash x$	158	160	165
45	3/8	0	1/12
50	1/8	1/3	1/12

離散型確率変数に対する条件付き確率 岩薩林 確率・統計 (3.15)

条件 (事象)$Y = y$ のもとでの，事象 $X = x$ の条件付き確率の表し方
$P(X = x|Y = y) = p_{\mathrm{X|Y}}(x \text{ の値 } |y \text{ の値})$

例 $p_{\mathrm{X|Y}}(158|45), p_{\mathrm{Y|X}}(45|158)$ 意味 自分の言葉でどうぞ
同時確率分布と周辺分布で書くと，

$$P(X = x|Y = y) = p_{\mathrm{X|Y}}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_{\mathrm{Y}}(y)}$$

$$P(Y = y|X = x) = p_{\mathrm{Y|X}}(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_{\mathrm{X}}(x)}$$

縦棒の前だけ見る (縦棒の後ろを固定する) と，前の変数についての，ただの確率分布

L05-Q1

Quiz(条件付き分布)

次の 6 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを引く.

♡7 ♡8 ♡9 ◇8 ♠9 ♣9

$X=$ 数, $Y=0$(赤札), 1(黒札) とすると同時分布は次のようになる.

$y\backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

1. 9 の札が出る条件のもとで赤札が出る, 条件付き確率を求めよう.
2. 赤札が出る条件のもとで 9 の札が出る, 条件付き確率を求めよう.

ここまで来たよ

4 多次元の確率変数

4 条件付き確率とベイズの定理
- 条件付き確率
- 全確率の法則
- ベイズの定理

条件付き確率と周辺分布から，同時確率分布，周辺分布

同時確率分布，周辺分布，条件付き確率の関係

同時確率分布との関係

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{XY}}(x, y) =& p_{\mathrm{X|Y}}(x|y) \times p_{\mathrm{Y}}(y) \\ =& p_{\mathrm{Y|X}}(y|x) \times p_{\mathrm{X}}(x). \end{aligned}$$

さらに周辺分布との関係 岩薩林 確率・統計 全確率の法則 (2.13)

$$p_{\mathrm{X}}(x) = \sum_{y} p_{\mathrm{X|Y}}(x|y) \times p_{\mathrm{Y}}(y),$$

$$p_{\mathrm{Y}}(y) = \sum_{x} p_{\mathrm{Y|X}}(y|x) \times p_{\mathrm{X}}(x)$$

L05-Q2

Quiz(同時分布・条件付き分布・周辺分布)

離散型確率変数 X は値 $2, 3$, Y は値 $20, 30$ をとる.
次がわかっている.

$$p_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (y = 20) \\ \frac{2}{3} & (y = 30) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$p_{\mathrm{X|Y}}(x|20) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 2) \\ \frac{1}{4} & (x = 3) \end{cases}, \quad p_{\mathrm{X|Y}}(x|30) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 2) \\ \frac{1}{2} & (x = 3) \end{cases}.$$

1. 同時分布を求めよう
2. X の周辺分布を求めよう.

岩薩林 確率・統計 例題 3.3,3.5,3 章練習問題 2

ここまで来たよ

4 多次元の確率変数

4 条件付き確率とベイズの定理
- 条件付き確率
- 全確率の法則
- ベイズの定理

例えばこんな問

Quiz(ベイズの定理)

外見で区別できない, 甘い品種 1 と渋い品種 2 の柿がある.
甘い品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
渋い品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.

1. かごの柿の $1/5$ が甘い柿である. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. 取り出した赤い柿が甘い確率を求めよう.

ベイズの定理 I

ベイズの定理 岩薩林 確率・統計 (2.18),(2.19)

$$p_{\mathrm{X|Y}}(x|y) = \frac{p_{\mathrm{Y|X}}(y|x)p_{\mathrm{X}}(x)}{\sum_{x'} p_{\mathrm{Y|X}}(y|x')p_{\mathrm{X}}(x')},$$

$$p_{\mathrm{Y|X}}(y|x) = \frac{p_{\mathrm{X|Y}}(x|y)p_{\mathrm{Y}}(y)}{\sum_{y'} p_{\mathrm{X|Y}}(x|y')p_{\mathrm{Y}}(y')}.$$

$p_{\mathrm{X|Y}}(x|y)$ を $p_{\mathrm{Y|X}}(y|x')$ (と $p_{\mathrm{X}}(x')$) で書き表す式,
$p_{\mathrm{Y|X}}(y|x)$ を $p_{\mathrm{X|Y}}(x|y')$ (と $p_{\mathrm{Y}}(y')$) で書き表す式.

L05-Q3

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$p_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & (y = 10) \\ \frac{4}{5} & (y = 20), \end{cases}$$

$$p_{\mathrm{X|Y}}(x|10) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x = 1) \\ \frac{2}{3} & (x = 2), \end{cases}, \quad p_{\mathrm{X|Y}}(x|20) = \begin{cases} \frac{4}{13} & (x = 1) \\ \frac{9}{13} & (x = 2). \end{cases}$$

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $p_{\mathrm{Y|X}}(10|1)$ を求めよう.
3. $p_{\mathrm{Y|X}}(10|2)$ を求めよう.

L05-Q4

Quiz(ベイズの定理)

外見で区別できない，甘い品種 1 と渋い品種 2 の柿がある．
甘い品種 1 は，確率 0.95 で赤に，確率 0.05 で黄色になる．
渋い品種 2 は，確率 0.125 で赤に，確率 0.875 で黄色になる．

1. かごの柿の 1/5 が甘い柿である．いま，無作為に 1 個の柿を取りだしたところ，赤い柿だった．取り出した赤い柿が甘い確率を求めよう．