正規分布

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L08(2021-06-02 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-05-29 Sat 08:40 JST hig"

今日の目標

-
-
-

L07-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率

1. $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X\leq 5]}(X)] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55}\mathrm{I}_{[X\leq 5]}(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x}{55} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$
2. $\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x = \frac{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{55} = \frac{385}{55} = 7.$
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x^2 - 7^2 = 55 - 7^2 = 6.$

L07-Q2

Quiz 解答:二項分布

表がでる回数は二項分布 $\mathrm{B}(100, \frac{2}{3})$ に従う確率変数を X である.

1. $P(X=40)$ を求めればいいから，
   ${}_{100}\mathrm{C}_{40}p^{40}(1-p)^{100-40} = \frac{100!}{40!60!}(\frac{2}{3})^{40}(1-\frac{2}{3})^{60}$.
2. $\mathrm{E}[X] = n \times p = \frac{200}{3}$. $\mathrm{V}[X] = n \times p(1-p) = \frac{200}{9}$.

L07-Q3

Quiz 解答:二項分布または独立同分布

1. $X \sim \mathrm{B}(10, 0.3)$ とすると，$Y = 2X$.
2. $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[2X] = 2 \times 10 \cdot 0.7 = 14$ 個.
3. $\mathrm{V}[Y] = 2^2\mathrm{V}[X] = 2^2 \times 10 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 8.4$ 個 ^{2}.
4. $P(Y=16) = P(X=8) = \frac{10}{2!8!}0.7^8 0.3^2$

別解. 10 パックそれぞれに入っている卵の個数を確率変数 B_i とすると, B_i は独立同分布にしたがう. $B_i = 2A_i$, $A_i \sim \mathrm{B}(1, 0.7)$ である.
$\mathrm{E}[B_i] = 1.4$, $\mathrm{V}[B_i] = 0.84$ なので,
$\mathrm{E}[Y] = 10\mathrm{E}[B_i] = 14, \mathrm{V}[Y] = 10\mathrm{V}[B_i] = 8.4.$
L07-Q4

Quiz 解答:二項分布または独立同分布

1. $X \sim \mathrm{B}(10, 0.3)$ とすると, $Y = 2X$.
2. $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[2X] = 2 \times 10 \cdot 0.7 = 14$ 個.
3. $\mathrm{V}[Y] = 2^2\mathrm{V}[X] = 2^2 \times 10 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 8.4$ 個 ^{2}.
4. $P(Y = 16) = P(X = 8) = \frac{10}{2!8!}0.7^8 0.3^2$

別解. 10 パックそれぞれに入っている卵の個数を確率変数 B_i とすると, B_i は独立同分布にしたがう. $B_i = 2A_i$, $A_i \sim \mathrm{B}(1, 0.7)$ である.
$\mathrm{E}[B_i] = 1.4$, $\mathrm{V}[B_i] = 0.84$ なので,
$\mathrm{E}[Y] = 10\mathrm{E}[B_i] = 14, \mathrm{V}[Y] = 10\mathrm{V}[B_i] = 8.4.$
L07-Q5
Quiz 解答:二項分布または独立同分布
100 回引いたときの当たりの回数は確率変数 $Y \sim B(100, 0.1)$. X と Y の関係は, $X = 7Y + 5(10 - Y) = 5Y + 200$ (円).

1. $P(X = 220) = P(Y = 4) = \frac{100!}{4!96!} 0.1^4 0.9^{96}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[5Y + 200] = 200 + 5\mathrm{E}[Y] = 200 + 5 \times 100 \times 0.1 = 250$(円).
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[5Y + 200] = 5^2\mathrm{V}[Y] = 5^2 \times 100 \times 0.1 \times 0.9 = 225$(円 ^{2}).

別解.
n 回めのくじで得られる賞金を W_n とすると, $W_1, \ldots, W_{100}$ は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[W_i] = 0.1 \times 7 + 0.9 \times 2 = 2.5$(円), 母分散は,
$\mathrm{V}[W_i] = 0.1 \times 7^2 + 0.9 \times 2^2 - 2.5^2 = 2.25$(円 ^{2}).
$Y = W_1 + \cdots + W_{100}$ だから, $\mathrm{E}[X] = 100 \cdot \mathrm{E}[W] = 250$(円).
$\mathrm{V}[X] = 100 \cdot \mathrm{V}[W] = 225$(円 ^{2}).

ここまで来たよ

7 二項分布

8 正規分布
- 標準正規分布
- 一般の正規分布

一般の正規分布 normal distribution 高校 数学 B 岩薩林 確率・統計 §4.5(4.23)

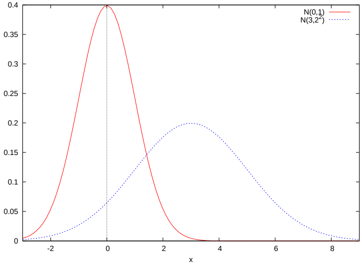
(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$ の確率密度関数

$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

b, a^2:パラメタ ($a > 0$).

https://www.geogebra.org/#probability

https://ja.wolframalpha.com $\rightsquigarrow$ 正規分布



$\rightsquigarrow$ 正規分布

Excel norm.dist

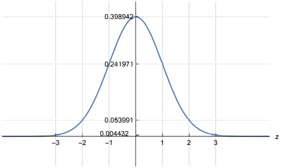
標準正規分布 standard normal distribution $\mathrm{N}(0,1^2)$ の性質

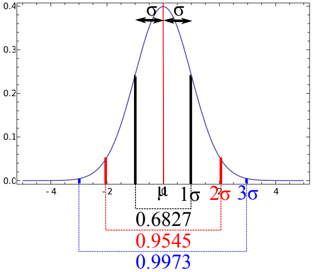
難しいので，まず $b=0, a=1$ の場合を考える．
あるいは，a 倍，b だけ平行移動する前のものを考える．

標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ の確率密度関数 岩薩林 確率・統計 (4.17)

$$f(z;0,1^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Excel で，=norm.s.dist(z,FALSE)



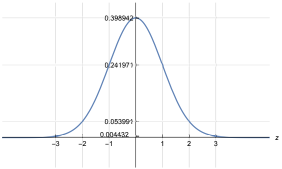


標準正規分布は $\mu=0, \sigma=1$

標準正規分布の母期待値

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$
k 次のモーメント (k:自然数)

$$\mathrm{E}[Z^{2k-1}] = 0, \quad \text{奇関数}$$
$$\mathrm{E}[Z^{2k}] = (2k-1)!!$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \quad \text{置換積分}$$



母平均値 $\mathrm{E}[Z] = 0,$ 岩薩林 確率・統計 (4.20) 奇関数

全確率 $\mathrm{E}[Z^0] = 1,$ 岩薩林 確率・統計 (4.19) 微積分 II

母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1$ 岩薩林 確率・統計 (4.21)

標準正規分布の確率と $I(z)$ の数表

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z < d) = \int_c^d f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z'$$

岩薩林 確率・統計 (4.22)

不定積分は, 簡単な関数では書けない. そこで,

$$I(z) \overset{\text{定義}}{=} \int_0^z f(z'; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z'$$

とおき,

$$\int_c^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z = \int_c^0 f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z + \int_0^d f(z; 0, 1^2)\,\mathrm{d}z$$
$$= -I(c) + I(d)$$

と書く. $I(z)$ は表になってる. 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227)

https://www.geogebra.org/classic#probability

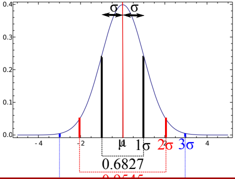
$I(z)$ の数表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227)

表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227) は, 紙の節約のため, $I(z)$ $(z \geq 0)$ しかないが, それだけで十分.
$I(z)$ $(0 < z < +\infty)$ ですべて書ける.

$I(z)$ の性質

- $f(z; 0, 1^2) > 0$ より $I(z)$ は単調増加.
- $f(z; 0, 1^2)$ が偶関数より, $I(z)$ は奇関数: $I(-z) = -I(z), I(0) = 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z; 0, 1^2)\, \mathrm{d}z = 1$ より, $I(+\infty) = \frac{1}{2} = -I(-\infty)$.

Excel では $I(z)$`=norm.s.dist(z,TRUE)-0.5`
上側確率 $Q(z) = \frac{1}{2} - I(z)$ の表を載せてる教科書も多い.



L08-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

1. 確率 $P(Z < 0)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.
2. 確率 $P(-0.56 < Z < +1.23)$ を $Q(z)$ または $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) の 1 次式または定数として表そう. 表を利用して小数として求めよう.

岩薩林 確率・統計 例題 4.9(p.91), 問題 8(p.92), 問題 10(p.96)

ここまで来たよ

7 二項分布

8 正規分布
- 標準正規分布
- 一般の正規分布

ふたたび一般の正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して，$X = aZ + b$ を考える．$Z = \frac{X-b}{a}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X^0] &= 1, & \text{微積分 II} \\ \mu = \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[aZ+b] = b, \\ \sigma^2 = \mathrm{V}[X] &= \mathrm{V}[aZ+b] = a^2, & \text{微積分 II} \end{aligned}$$

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \rightsquigarrow f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

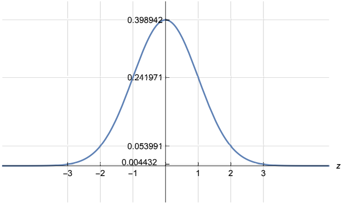
X は，$\mathrm{N}(b, a^2)$ にしたがい，母平均値 b，母分散 a^2.

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

母平均値 $\mathrm{E}[X] = \mu$，母分散 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は，

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき, $X = aZ + b$ は,
$\mathrm{E}[X] = b, \mathrm{V}[X] = a^2, X \sim \mathrm{N}(a \cdot 0 + b, 1^2 \cdot a^2)$.



$$f(x; 0, 1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

一般に正規分布は拡大縮小平行移動しても正規分布 (こういう性質は連続一様分布と正規分布くらい).

正規分布の 1 次式による変換 岩薩林 確率・統計 (4.24)

$X \sim \mathrm{N}(\beta, \alpha^2)$, $Y = aX + b$ のとき, $Y \sim \mathrm{N}(a\beta + b, \alpha^2 \cdot a^2)$.

L08-Q2

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 3^2}}$$

にしたがう.

1. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. $f(x)$ のグラフを描こう.

https://ja.wolframalpha.com でつぎのように入力してグラフを描いてみよう.

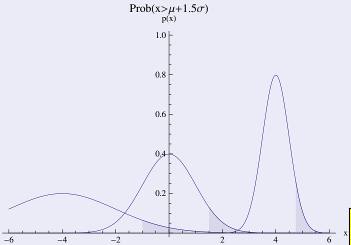
```
1/sqrt(2*pi*1)e^(-x^2/2), 1/sqrt(2*pi*3^2)e^(-(x-4)^2/(2*3^2))
```

正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方 I

一般の正規分布の確率

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率は，標準化 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ して求める.

$$P(c < X < d) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < \tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{d-\mu}{\sigma}) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < Z < \tfrac{d-\mu}{\sigma})$$



斜線部の面積はどれも同じ

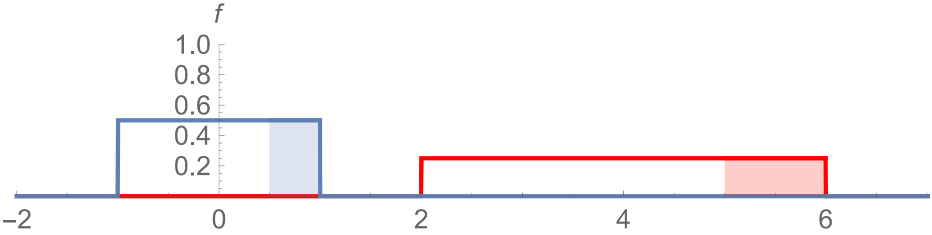
確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{V}[X], \sigma > 0$ とする.
確率変数 Z を $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ と定めると, $\mathrm{E}[Z] = 0$, $\mathrm{V}[Z] = 1$ となる.

Z は標準化された確率変数

$Y \sim \mathrm{U}(2,6)$ を標準化すると, $Z = \dfrac{Y - \frac{2+6}{2}}{\frac{6-2}{\sqrt{12}}} = \dfrac{Y-4}{4/\sqrt{12}} \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

$X \sim \mathrm{U}(c,d)$ を標準化すると,$Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$



左から $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$, $Y = aX + b = 2X + 4 \sim \mathrm{U}(2,6)$.

標準化しても確率が同じことの別説明 (置換積分)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき, 積分で $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$ とすると,

$$
\begin{aligned}
P(c < X < d) &= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\sigma \mathrm{d}z \\
&= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z < \frac{d-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

L08-Q3

Quiz(正規分布の確率)

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(3, 2^2)$ とする.

1. 確率密度関数とそのグラフを答えよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
3. $P(X \geq 5)$ を, $I(z) = \int_0^z f(z'; 0, 1^2)\mathrm{d}z'$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.
4. $P(+1 \leq X \leq 7)$ を $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.
5. $P(+3 \leq X \leq 7)$ を $I(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.

岩薩林 確率・統計 §4.5 例題 4.10,4.11, 問題 10, 第 4 章練習問題 5