# 母分散のカイ二乗検定と適合度のカイ二乗検定

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L15(2021-07-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-07-20 Tue 08:58 JST hig"

今日の目標

- 有意水準 $\alpha$, 検出力 $1-\beta$ と混同行列を説明できる
- 母分散のカイ二乗検定を実行できる
- 適合度のカイ二乗検定を実行できる

## L14-Q1

## Quiz 解答:母比率の片側検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = \frac{1}{10}$, 対立仮説を母比率 $r > \frac{1}{10}$ とする.
3. 帰無仮説のもとで, 100 本中のあたりの回数 $T \sim \mathrm{B}(\frac{1}{10}, 100)$. あたりの標本比率を $\hat{r}$ とすると, $Z = \frac{\hat{r} - \frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})}}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう.
4. この標本に対して $\hat{r} = \frac{15}{100}$ なので, 検定統計量の実現値は $Z = \frac{5}{3} = 1.667$.
5. 棄却域は $z > z(0.05) = 1.645$.
6. $1.667 > 1.645$ なので,$z$ は棄却域に含まれる. 帰無仮説を棄却する. よって母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

## 不等式が逆の場合

6. 帰無仮説を棄却できない. よって, 母比率 $r > \frac{1}{10}$ とは結論できない.」

## p 値による場合

5. p 値は $p = P(Z > \frac{5}{3}) = I(+\infty) - I(\frac{5}{3}) = \frac{1}{2} - 0.4525 = 0.0475.$
6. $0.0475 = p < \alpha = 0.05$ なので帰無仮説を棄却する. よって母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

L14-Q2

## Quiz 解答:母比率の両側 (二項) 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母比率の両側検定を行う.
2. 帰無仮説を「瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $r = 0.4$」, 対立仮説を「$r \neq 0.4$」とする.

3. サイズ $n = 68$ の標本の標本比率を $\hat{r}$ とすると, 検定統計量

$$Z = \frac{\hat{r} - 0.4}{\sqrt{0.4(1-0.4)/68}}$$

は, 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に近似的にしたがう.
4. この標本に対して, $\hat{r} = 20/68 = 0.2941$ より, $z = -1.782$.
5. 標準正規分布表より境い目の値は $z(0.05/2) = 1.960$. (または $t_\infty(0.05/2)$) 棄却域は $|z| > 1.960$.
6. $1.960 > |-1.782|$ なので, $z$ は棄却域に含まれない. 帰無仮説は棄却できない. 瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $r = 0.4$ でない, とは結論できない.

不等式が逆の場合

6. …なので, $z$ は棄却域に含まれる. 帰無仮説を棄却する. 瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $r \neq 0.4$ であると結論する.

p 値による場合

5. $p = P(|Z| > 1.782) = I(\infty) - I(1.72) + I(-1.72) - I(-\infty) = 2(0.5 - 0.4573) = 0.0854.$
6. $p = 0.0854 > 0.05 = \alpha$ より, 帰無仮説は棄却できない. 瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $r = 0.4$ でない, とは結論できない.

# ここまで来たよ

14 母比率の検定・p 値・統計的仮説検定の考え方

15 母分散のカイ二乗検定と適合度のカイ二乗検定
- 統計的仮説検定と混同行列
- 母分散のカイ二乗検定
- 適合度のカイ二乗検定

# 母分布についての真実と，検定での棄却の有無

| | 帰無仮説を棄却 (有意) | 帰無仮説を棄却できない (有意でない) |
|---|---|---|
| 帰無仮説が成立しない $\mu \neq \mu_0$ | 確率 $1-\beta$ | 第 2 種の過誤 確率 $\beta$ |
| 帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$ | 第 1 種の過誤 確率 $\alpha$ | 確率 $1-\alpha$ |

$1-\alpha$, $1-\beta$ はどちらも大きくしたいが，両立しない.
$\alpha$ はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or $0.05$) に固定して，$1-\beta$ をなるべく大きくするように試みる習慣.
見逃し率: $\beta$. 検出力:$1-\beta$.
誤検出率, 有意水準, 危険率: $\alpha$.

# 検定と比較したインフルエンザ検査の混同行列

岩薩林 確率・統計 §6.3 | 確率統計 I(2021)L06

| | 検査で陽性 | 検査で陰性 |
|---|---|---|
| 病気 | ○ (TP 真陽性) | × (FN 見逃し, 偽陰性) |
| 病気でない | × (FP 誤検出, 偽陽性) | ○ (TN 真陰性) |

真/偽=True/False, 陽性/陰性=Postive/Negative
どちらも大きい方がいいが, 一方を大きくすると他方が小さくなりがち

- 感度=再現率=真陽性率=recall=sensitivity= $\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP+FN}} = 1-\beta$
- 特異度=真陰性率=specificity= $\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TN+FP}} = 1-\alpha$

# ここまで来たよ

14 母比率の検定・p 値・統計的仮説検定の考え方

15 母分散のカイ二乗検定と適合度のカイ二乗検定
- 統計的仮説検定と混同行列
- 母分散のカイ二乗検定
- 適合度のカイ二乗検定

# 分散は大きすぎる説 I

L15-Q1

## Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

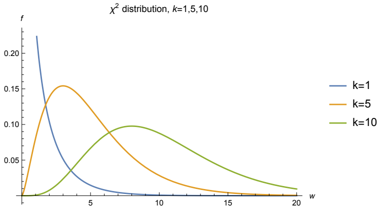
このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 $\sigma^2$ は, $2^2\mathrm{g}^2$ より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

岩薩林 確率・統計 §7 練習問題 1(3)

# カイ二乗分布 岩薩林 確率・統計 p.123 確率統計 I(2021)L11

## カイ二乗分布

$Z_1, \ldots, Z_k \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$, iid のとき, 確率変数 $W = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ は, 自由度 $k$ のカイ二乗分布 $\chi_k^2$ にしたがう.




$W_k \sim \chi_k^2$ に対して,
$\mathrm{E}[W_k] = k, \mathrm{V}[W_k] = 2k.$

## 不偏標本分散のしたがう分布

岩薩林 確率・統計 定理 5.6 確率統計 I(2021)L11

正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からサイズ $n$ の標本を取り出すとき, 不偏標本分散 $S^2$ から定めた

$$W = (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2}$$

は, 自由度 $n-1$ の カイ二乗分布 $\chi_{n-1}^2$ にしたがう.

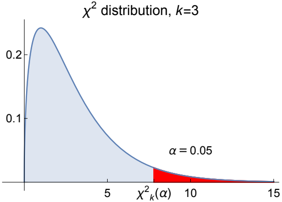
# 母分散の片側カイ二乗検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.4 I

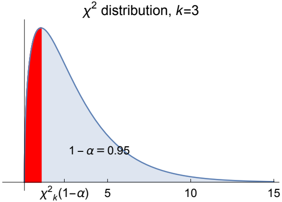
N(未知, 未知) の標本に基づき, 母分散 $\sigma^2$ が $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (または $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ) と言いたい. $\sigma_0^2$: 主張したい値.
前提 $X \sim \mathrm{N}$(未知, 未知), サイズ $n$ の標本の不偏標本分散 $S^2$.

1. 有意水準 $\alpha$ で母分散の片側カイ二乗検定を行う.
2. 帰無仮説を 母分散 $\sigma^2 = \sigma_0^2$, 対立仮説を $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (または $\sigma^2 < \sigma_0^2$) とする.
3. 帰無仮説のもとで検定統計量 $Y = (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布 $\chi^2_{n-1}$ にしたがう. 確率統計 I(2021)L11 岩薩林 確率・統計 (7.5) これを検定統計量として用いる
4. この標本に対して検定統計量 $Y$ の実現値は…
5. 棄却域 $Y > \chi^2_{n-1}(\alpha)$ (または $Y < \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$)
6. $Y$ の実現値は棄却域に属する/属しないので, 帰無仮説を棄却する/できない. よって母分散 $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ($\sigma^2 > \sigma_0^2$) と結論する/できない.

# 母分散の片側カイ二乗検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.4

母平均値, 母比率の検定統計量 $T, Z$ は差, 正常値は $0$.
母分散の検定統計量 $Y$ は比, 正常値は $1 \times (n-1)$.



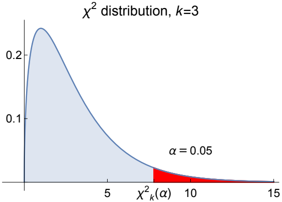
## L15-Q1

### Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 $\sigma^2$ は, $2^2\mathrm{g}^2$ より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.


χ2 distribution, k=3
0.2
0.1
α = 0.05
5
χ2k(α)
10
15

# L15-Q2

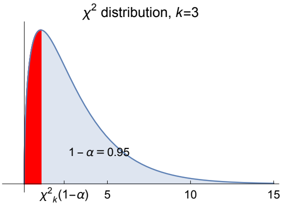
## Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
アルバイトのリーダーの人に, ポテトフライ S サイズを 11 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$73, 74, 74, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76$$

このリーダーの作るポテトフライ S の重さの母分散 $\sigma^2$ は, $2^2\mathrm{g}^2$ より小さいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

岩薩林 確率・統計 問題 5(p.166)


$\chi^2$ distribution, $k$=3
$1-\alpha = 0.95$
$\chi^2_k(1-\alpha)$
5
10
15

# ここまで来たよ

14 母比率の検定・p 値・統計的仮説検定の考え方

15 母分散のカイ二乗検定と適合度のカイ二乗検定
- 統計的仮説検定と混同行列
- 母分散のカイ二乗検定
- 適合度のカイ二乗検定

# ナントカのカイ二乗検定

- 上でやったのは (母分散の) カイ二乗検定
- 世の中には，カイ二乗分布を使う，ナントカのカイ二乗検定がたくさんある
- 不偏標本分散以外にも，カイ二乗分布にしたがう量がたくさんあるから．
  - 中心極限定理のために，$n \to +\infty$ で $X_i$ が正規分布に近づくことが多く，$W = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$ は，$X_1 = \cdots = X_k = 0$ からのずれを表す代表的な量だから．
- 最初の例 (カテゴリ変数に関する例)
  - 適合度の検定 岩薩林 確率・統計 §8.3
  - 独立性の検定 岩薩林 確率・統計 §8.4

# カテゴリカル分布 岩薩林 確率・統計 §8.3

**ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1,p)$ (二択)**

$x=0,1$. 不平等なコインの表裏.

$$p(x)=\begin{cases}1-p & (x=0)\\ p & (x=1)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

$\overset{k=2}{\longleftarrow}$

**カテゴリカル分布 $\mathrm{C}(p_1,\ldots,p_k)$ ($k$ 択)**

$x=1,2,\ldots,k$. 不平等な $k$ 択ガチャ.

$$p(x)=\begin{cases}p_1 & (x=1)\\ p_2 & (x=2)\\ \vdots & \vdots\\ p_k & (x=k)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

開き直ればすべての有限の離散分布はカテゴリカル分布

## ベルヌーイ分布

母集団は母比率 $p$ で定まる.

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 確率 | $1-p$ | $p$ |

↓ サイズ $n$ の標本抽出

| データ番号 | 表裏 |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| ⋮ | ⋮ |
| 12 | 1 |

↓ 数える

度数分布表

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 度数 | $n-k=7$ | $k=5$ |

この度数を得る確率 (二項分布)

$\frac{12!}{5!7!}p^5(1-p)^5$.

$\overset{k=2}{\longleftarrow}$

## カテゴリカル分布

母集団は母比率 $p_1, \ldots, p_{k-1}(, p_k)$ で定まる. $p_1 + \cdots + p_k = 1$.

| カテゴリ | O 型 | A 型 | AB 型 | B 型 |
|---|---|---|---|---|
| 確率 $p_i$ | 0.12 | 0.51 | 0.17 | 0.20 |

↓ サイズ $n$ の標本抽出

| 出席番号 | 血液型 |
|---|---|
| 1 | B 型 |
| 2 | O 型 |
| ⋮ | ⋮ |
| 12 | A 型 |

↓ 数える

度数分布表

| カテゴリ | O 型 | A 型 | AB 型 | B 型 |
|---|---|---|---|---|
| 度数 $y_i$ | 2 | 3 | 6 | 1 |

$y_1 + \cdots + y_k = n$.

この度数を得る確率 (多項分布)

$\frac{12!}{2!3!6!1!}0.12^2 0.51^3 0.17^6 0.20^1$

# 適合度を表す量

標本が (思う) 母分布に似てたら (適合してたら)$0$, 似てなかったら正の大きな数になるような量を作ろう.
アイテム $i$ の期待度数 $e_i = np_i$.

## ピアソンの適合度基準 $\chi^2$

カテゴリ $k$ 個, カテゴリカル分布の $p_i(i = 1, \ldots, k)$, 標本の度数 $y_i$, 標本サイズ $n$, のとき, 次の量をピアソンの適合度基準 $\chi^2$ という.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(y_i - np_i)^2}{np_i}.$$

| カテゴリ | O 型 | A 型 | AB 型 | B 型 |
|---|---|---|---|---|
| 確率 $p_i$ | $0.12$ | $0.51$ | $0.17$ | $0.20$ |

| カテゴリ | O 型 | A 型 | AB 型 | B 型 |
|---|---|---|---|---|
| 度数 $y_i$ | $2$ | $3$ | $6$ | $1$ |

$n = 12$.

# 適合度の検定

$\chi^2$ がどのくらい大きかったら, 「あてはまってない」と言っていいの?
$\rightsquigarrow$ 統計的仮説検定
実は, $n$ が大きいとき, $\chi^2$ は, 自由度 $k-1$ のカイ二乗分布にしたがう.
前提 カテゴリカル分布 $\mathrm{C}(p_1, \ldots, p_k)$ から抽出された標本.

1. 有意水準 $\alpha = \ldots$ で適合度のカイ二乗検定を行う.
2. 帰無仮説を, $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, 対立仮説をどれかの $i$ で $p_i \neq q_i$ とする.
3. 帰無仮説のもとで検定統計量 ピアソンの適合度基準 $\chi^2$ は自由度 $k-1$ のカイ二乗分布にしたがう. これを検定統計量として用いる
4. この標本に対して検定統計量 $\chi^2$ の実現値は $\chi^2 = \ldots$ である
5. 棄却域は $\chi^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha)$
6. $\chi^2$ の実現値は棄却域に属する/属さないので, 帰無仮説を棄却する/できない. よって どれかの $i$ で $p_i = q_i$ でないと結論する/できない
$=$ 適合しないと結論する/できない

# L15-Q3

## Quiz(ピアソンの $\chi^2$ と適合度の検定)

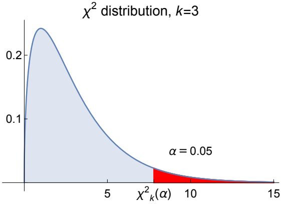
日本人の高校生からサイズ 24 の標本を抽出して血液型で分類したところ, 度数 (人数) は下の表のようになった.

| A | AB | B | O |
|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 6 | 8 |

ある人の理論によれば, 日本人の血液型分布は A:AB:B:O=$\frac{6}{12}:\frac{1}{12}:\frac{3}{12}:\frac{2}{12}$ であるという.

1. 母分布と, 標本からピアソンの適合度基準 $\chi^2$ を求めよう.
2. この標本が母分布にしたがっているかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 適合度のカイ二乗検定を行って判定しよう.

岩薩林 確率・統計 例題 8.5(p.189), 問題 6(p.190)


$\chi^2$ distribution, $k$=3
0.2
0.1
$\alpha = 0.05$
5
$\chi^2{}_k(\alpha)$
10
15

# 多項分布

## 多項分布 $M(n, p_1, \ldots, p_k)$

$k$ 次元の (!) 離散型確率変数 $Y_1, \cdots, Y_k$. 確率関数は,

$$p(y_1, \ldots, y_k) = \begin{cases} \frac{n!}{y_1! y_2! \cdots y_k!} p_1^{y_1} \cdots p_k^{y_k} & (y_1 + \cdots + y_k = n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味

アイテム 1, ..., $k$ が, それぞれ確率 $p_1, \ldots, p_k$ ででるガチャ.
$n$ 回引いたときに, 出た個数が, $y_1, \ldots, y_k$ となる確率.
二項分布 $B(n, p_1)$ は $k = 2$ の場合. その一般化.
母比率が $k$ 個 ($k - 1$ 個?) あるようなもの.
$\downarrow k = 2$

## 二項分布

$k = 2$ とおくと $\mathrm{M}(n, p_1, p_2 = 1 - p_1)$ は二項分布 $\mathrm{B}(n, p_1)$.

$$p(y) = \begin{cases} \frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y} & (y = 0, 1, \ldots, n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$p_1 = p, p_2 = 1 - p, y_1 = y, y_2 = n - y.$

# ピアソンの適合度基準 $\chi^2$ がカイ二乗分布にしたがうこと

$k=2$ としよう. $Y_1 \sim \mathrm{B}(n, q_1) \overset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{N}(nq_1, nq_1(1-q_1))$

$$
\begin{aligned}
\chi^2 =& \frac{(y_1 - nq_1)^2}{nq_1} + \frac{(y_2 - nq_2)^2}{nq_2} \\
=& \frac{(y_1 - nq_1)^2}{nq_1} + \frac{((n-y_1) - n(1-q_1))^2}{nq_2} \\
=& (y_1 - nq_1)^2 \frac{1}{nq_1(1-q_1)} = \left( \frac{y_1 - nq_1}{\sqrt{nq_1(1-q_1)}} \right)^2 =: X^2
\end{aligned}
$$

$X = \frac{y_1 - nq_1}{\sqrt{nq_1(1-q_1)}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$(中心極限定理+標準化), $\chi^2 = X^2 \sim \chi^2_1$.

適合度のカイ二乗検定 ($\alpha = 0.01$) は, 正規近似による母比率の検定と同じ.

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$: $z(0.005) = 2.576$,

$W = Z^2 \sim \chi^2_1$: $\chi^2_1(0.01) = 6.635 = 2.576^2$

一般に $z(\alpha/2)^2 = \chi^2_1(\alpha)$