母比率・母分散の検定・片側検定

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L15(2023-07-24 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-24 Mon 07:03 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側検定ができる 岩薩林 確率・統計 §7.3
- p 値を使った検定ができる
- 第 1 種, 第 2 種の過誤, 有意水準と検出力を説明できる

L14-Q1

Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq \mu_0$」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{S^2/5}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対する検定統計量の実現値は,
$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{49-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
5. 棄却域は $|t| > t_4(0.05/2)$. rvt=stats.t(df=4)　rvz.ppf(1-0.05/2) または t 分布表より $|t| > 2.776$.

6. $|-6.708| > 2.776$ であり, 実現値 t は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.
(注: このことを,「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

L14-Q2

Quiz 解答: 正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」, すなわち $\mu = 196$ とする. 対立仮説を $\mu \neq 196$ とする.

3. サイズ n の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とすると, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{S^2/4}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n-1$ の t 分布に従う.
4. この標本の実現値は $\bar{X} = 200, S^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって, $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}} = 0.92582$.
5. t 分布表より, 棄却域は $|t| > t_3(0.05/2)$ すなわち, $|t| > 3.182$.
6. $|0.92582| < 3.182$ であり, この標本の実現値は棄却域に含まれないので, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数の母平均値が変化したとは結論できない.
(注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

ここまで来たよ

14 統計的仮説検定

15 母比率・母分散の検定・片側検定
- 片側検定
- 母比率の検定＝二項検定 (の正規近似)
- p 値＝有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母平均値・母分散・母比率の検定

	両側	片側
母平均値	**両側t検定** 確率統計 I(2023)L14 岩薩林 確率・統計 問題 2(p.160) 前回の授業	**片側t検定** 岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159)
母分散	**両側カイ二乗検定** 岩薩林 確率・統計 例題 7.4(p.165)	**片側カイ二乗検定** 岩薩林 確率・統計 問題 5(p.166) 岩薩林 確率・統計 §7 練習問題 1(3)
母比率	**両側二項検定** 岩薩林 確率・統計 練習問題 2(p.173)	**片側二項検定** 岩薩林 確率・統計 例題 7.7(p.172) 岩薩林 確率・統計 例題 7(p.172) 岩薩林 確率・統計 練習問題 3(p.173) 今回の授業 確率統計 I(2023)L15

例: 分散が大きすぎる心配

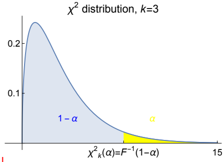
L15-Q1

Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

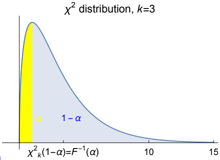
あるファーストフードチェーンでは，ポテトフライ S の重さを一定にするために，その母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという．
トレーニング中のアルバイトの人に，ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ，重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は，$2^2\mathrm{g}^2$ より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し，有意水準 $\alpha = 0.05$ で，母分散のカイ二乗検定で判定しよう．



上側片側



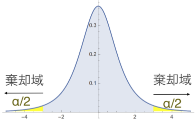
下側片側

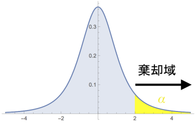
岩薩林 確率・統計 定理 7.4 | 岩薩林 確率・統計 練習問題 7-1(3)(p.173)

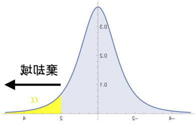
片側検定と両側検定 岩薩林 確率・統計 p.150

- 片側・両側検定の帰無仮説 $\mu = \mu_0$.
- 片側 t 検定の対立仮説 $\mu > \mu_0 (\mu < \mu_0)$
- 両側 t 検定の対立仮説 $\mu \neq \mu_0$

片側検定では, どちらか片側だけに確率=面積 α の棄却域ができる. 実現値がここにはいったら帰無仮説を棄却.
両側検定のときは, 両側に確率=面積 $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる. 実現値がいずれかにはいったら帰無仮説を棄却.

両側 

上側片側 

下側片側 

ここまで来たよ

14 統計的仮説検定

15 母比率・母分散の検定・片側検定
- 片側検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母比率の検定 I

p と書いてた母比率, 二項分布の $X \sim \mathrm{B}(p, n)$ の p を, 今日は r と書きます

例 (母比率の検定のアイデア)

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率)$r = 1/5$ だと言われているが, もっと表がでちゃう気がする.
50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ, 表 $X = 15$ 回表が出た.
こんな「稀な」ことが起きるってことは, そうに違いない!

$\rightsquigarrow$ これ, 統計的仮説検定として定式化できる考え方
前提 表が出る回数 $X \sim \mathrm{B}(r, n)$.
帰無仮説 $r = \frac{1}{5}$, 対立仮説 $r > \frac{1}{5}$.

母比率の検定 II

帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで, $X = 15$ はとても稀 (矛盾) と言いたい. 確率統計 I(2023)L14

$$P(X = 15) = \frac{50!}{15!(50-15)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-15} = 0.0299 \quad \text{稀じゃん}$$

ちょっと待て. 特定の回数が出ることじたい稀. 上の確率は
1/場合の数 $= 1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい $50 \cdot \frac{1}{5}$ 回

$$P(X = 10) = \frac{50!}{10!(50-10)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-10} = 0.1398$$

だって稀じゃん?
これ ($X = 15$) 以上に極端なことが起きる確率を考えよう.

$$P(15 \leq X \leq 50) = \sum_{k=15}^{50} P(X = k)$$

母比率の検定 III

36 個も加えるの? …これを計算機などで直接計算してしまう手もある正確確率検定
正規近似による計算 確率統計 I(2023)L10

$\mathrm{E}[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10, \mathrm{V}[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$
中心極限定理より, '近似的に' $X \sim \mathrm{N}(10, 8)$. $Z = \frac{X-10}{\sqrt{8}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.

$$\begin{aligned} P(15 \le X \le 50) =& P(\tfrac{15-10}{\sqrt{8}} \le Z < +\infty) \\ =& F_{\mathrm{Z}}(\infty) - F_{\mathrm{Z}}(\tfrac{15-10}{\sqrt{8}}) \\ =& 1 - \mathsf{cdf}(\tfrac{15-10}{\sqrt{8}}) = 1 - 0.96145 = 0.0385. \end{aligned}$$

確率統計 I(2022)L05

母比率の検定 IV

$P(X \geq 15) = 0.0385$ (これがあとで出てくる p 値) が稀と思うかは主観.
けんかにならないように, 計算し始める前に基準を決めておく. それが,
有意水準 $\alpha = 0.05$ or 0.01.

上で出てきた, Z は, 分子分母を $n = 50$ で割ると,

$$\frac{15-10}{\sqrt{8}} = \frac{\frac{15}{50}-\frac{10}{50}}{\sqrt{\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{4}{5}}} = \frac{\hat{r}-r_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot r_0\cdot(1-r_0)}}$$

という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.
ただし, 平方根の中にあるのは帰無仮説の母比率 $r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率は $\hat{r}$.

再掲: 一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

確率統計 I(2023)L14

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」「対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 X は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「'y 不等号 (境い目)' より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である/とはいえない」

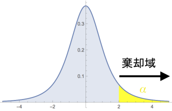
母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

岩薩林 確率・統計 定理 7.6(p.171)

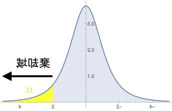
前提 $X \sim \mathrm{B}(r, n)$.

1. 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
3. 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{X - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき).
   $\hat{r} = \frac{X}{n}$: 標本比率, r_0: (帰無仮説の) 母比率.
4. この標本に対して検定統計量の実現値は⋯
5. 棄却域は $z > z(\alpha)$ (or $z < -z(\alpha)$).
6. 「(⋯) より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない.

上側片側



下側片側



L15-Q2

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 15 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう.

岩薩林 確率・統計 例題 7.7, 問題 8(p.172), 第 7 章練習問題 2,3

L15-Q3

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより小さいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 5 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.01$ で母比率の検定を行おう.

ここまで来たよ

14 統計的仮説検定

15 母比率・母分散の検定・片側検定
- 片側検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

p 値=有意確率による棄却する/しない判定 岩薩林 確率・統計 p.152

検定の Step6 では, X や Z が極端かどうか判定している

$X = 15 \Leftrightarrow Z = \frac{15-10}{\sqrt{8}}$ が棄却域 $(\alpha = 0.05)$ に入っているか?

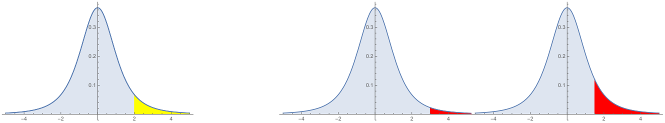
$\Updownarrow$

p 値 $P(X \geq 15) = P(z \geq \frac{15-30}{\sqrt{8}})$ が有意水準 α より小さいか?

標本の p 値 (p-value)=有意確率 岩薩林 確率・統計 p.152

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本よりも極端な値をとる確率

$\alpha > p$ のとき帰無仮説を棄却



上側片側検定のとき p 値 $= 1 - F(z)$.

棄却域の考え方での棄却: $z > F^{-1}(1-\alpha)$.　$F(z)$ は増加関数だから⋯

p 値の考え方での棄却: $F(z) > 1 - \alpha$ すなわち $p = 1 - F(z) < \alpha$.

ここまで来たよ

14 統計的仮説検定

15 母比率・母分散の検定・片側検定

- 片側検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母分布についての真実と，検定での棄却の有無

	帰無仮説を棄却，有意である	帰無仮説を棄却できない，有意でない
対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	確率 $1-\beta$	第 2 種の過誤 確率 β
帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	第 1 種の過誤 確率 α	確率 $1-\alpha$

α, β はどちらも小さくしたいが，両立しない．

α はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or 0.05) に固定して，β をなるべく小さくするように試みる習慣．

見逃し率: β. 検出力:$1-\beta$.

誤検出率，有意水準，危険率: α.

検定とインフルエンザ検査 岩薩林 確率・統計 §6.3

	検査で陽性	検査で陰性
病気	○ (TP 真陽性)	×(FN 見逃し, 偽陰性)
病気でない	×(FP 誤検出, 偽陽性)	○ (TN 真陰性)

真/偽=True/False, 陽性/陰性=Postive/Negative
混同行列 (confusion matrix) 上の度数や頻度を表にして，行列と思ったもの．機械学習でも使う (画像の猫判定)

以下はどれも大きい方がいいが, 一つを大きくすると他が小さくなりがち

- 感度=再現率=真陽性率=recall=sensitivity= $\frac{\text{TP}}{\text{TP+FN}} = 1-\beta$
- 特異度=真陰性率=specificity= $\frac{\text{TN}}{\text{TN+FP}} = 1-\alpha$
- 適合率=precision= $\frac{\text{TP}}{\text{TP+FP}}$
- 正解率=精度=accuracy $= \frac{\text{TP+TN}}{\text{すべて}}$
- F 値=recall と precision の調和平均

連絡

- 2023-07-24 月 20:00 まで TrialL14
- 2023-07-31 月 1 任意参加の小テスト 確率統計 I(2023)L14
- 2023-07-31 月 20:00 まで TrialL15=Moodle の Web 練習問題的なもの+アンケート+作文レポート
- 2023-07-24 月 20:00 まで 考慮対象になるかもしれない欠席の届を提出．L15 の分は 2023-07-31 月 20:00
- Trial L14 の採点結果の公表は，2023-07-24 より後，2023-07-31 直前になってしまうかも．
- 3 年前期必修 数理と社会でお会いしましょう