# 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L14(2024-07-22 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-21 Sun 16:17 JST hig"

今日の目標

- 岩薩林 確率・統計 §6.3 統計的仮説検定を説明できる
- 岩薩林 確率・統計 §7.1 母平均値の両側 t 検定ができる

## L13-Q1

### Quiz 解答:t 分布の確率と $t_k(\alpha)$

1. $\Phi^{-1}(1-0.025) = \mathsf{ppf}(1-0.025) = z(0.025) = 1.960.$
2. $F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.025) = \mathsf{ppf}(1-0.025) = t_{40}(0.025) = 2.021.$

## L13-Q2

### Quiz 解答: 母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $\overline{X} = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $S^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$. 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$
\begin{aligned}
50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
50 - t_3(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 + t_3(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
46.563 &< \mu < 53.437
\end{aligned}
$$

2. 同様に,

$$
\begin{aligned}
50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
50 - t_3(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 + t_3(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} &< \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\
43.691 &< \mu < 56.309
\end{aligned}
$$

## Quiz 解答: 正規分布の母数の最尤推定

1. $L(\beta_0,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(y_1-\beta_0)^2}{2\sigma^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(y_1-\beta_0)^2}{2\sigma^2}}$.
2. $\frac{\partial L}{\partial\beta_0}(\beta_0,\sigma)$ より，$(y_1-\beta_0)+(y_2-\beta_0)=0$.
   $\frac{\partial L}{\partial(\sigma^2)}(\beta_0,\sigma)$ より，$-1+\frac{1}{\sigma^2}\frac{(y_1-\beta_0)^2+(y_2-\beta_0)^2}{=}0$.
   これらを解いて，
   $\beta_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. (最尤推定の結果は，標本平均値と同じ)
   $\sigma^2=\frac{1}{2}((y_1-\beta_0)^2+(y_2-\beta_0)^2)=\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2$. (最尤推定の結果は，不偏標本分散と異なる

L13-Q3
$x=0$ のとき，$Y\sim\mathrm{N}(\beta_0,\sigma^2)$.
$x=1$ のとき，$Y\sim\mathrm{N}(\beta_0+\beta_1,\sigma^2)$.
$x=2$ のとき，$Y\sim\mathrm{N}(\beta_0+2\beta_1,\sigma^2)$.

# ここまで来たよ

13 母平均値の区間推定・線形モデル

14 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)

# 推定 (estimation) と検定 (test)

点推定 $\mu$ は値 xx と推定 岩薩林 確率・統計 §6.1

区間推定 $\mu$ は値 yy と値 zz の間と推定 (信頼係数 $1-\alpha$ で) 岩薩林 確率・統計 §6.2

仮説検定 $\mu$ は値 xx と差がある と, (時々) 断言 (有意水準 $\alpha$ で) =見逃し多いけど発色したら正しい ($1-\alpha$ で) 血痕試験紙

岩薩林 確率・統計 §6.3

あるドーナツ製造器は, 重さ $X$(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, 違う感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は⋯ 自分の方法は優れていると言いたい.

# 検定はだいたいこんな考え方 岩薩林 確率・統計 §6.3

確率変数 $X$ は, 正規分布 $\mathrm{N}(55, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 55$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. というより, 本当でないと言いたい

サイズ 4 の標本を抽出したところ,

$$54, 57, 57, 60$$

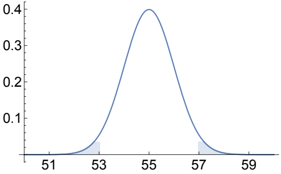
だった. → 標本サイズ $N = 4$, 標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{4}(X_1 + \cdots + X_4) = 57$.

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(55, 2^2/4)$.

確率 $\alpha$(=有意水準) でしか起きないようなまれなことが起きたら (検定統計量 $\overline{X}$ の実現値が棄却域に含まれるなら)

おかしいと判定する (帰無仮説を棄却する)

棄却域とは, $\overline{X}$ の数直線の, ある部分集合のこと（不等式で指定される）



# 帰無仮説と対立仮説

- $H_0$: 帰無仮説 (null hypothesis) ＝ 背理法の仮定 ＝「真の母平均値 $\mu$ は 55g に等しい」
- $H_1$: 対立仮説 (alternative hypothesis) ＝ 示したい命題 ＝「真の母平均値 $\mu$ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズを大きくできないことが多い. 小さくても Yes/No の結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する reject
検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいったら) 帰無仮説 (=背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)
帰無仮説を棄却しない accept
実験失敗 (背理法使おうとしたけど矛盾導けなかった). 何も言えない (発色しなかった)

# ここまで来たよ

13 母平均値の区間推定・線形モデル

14 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定
- 母比率の検定＝二項検定 (の正規近似)

## L14-Q1

### Quiz(母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X$g は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は 55g だと言われていたが疑っている. きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.
$50\mathrm{g}, 50\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 46\mathrm{g}, 48\mathrm{g}.$
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X$g の母平均値が 55g と異なるかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう.

# 一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」「対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 $Y$ は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「‘「$y$」不等号「境い目」’より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である/とはいえない」

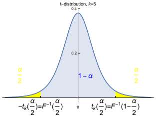
# 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

## 母平均値の両側 t 検定 岩薩林 確率・統計 定理 7.2(p.159)

前提 母集団が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \text{何か})$ にしたがう.

1. 有意水準 $\alpha$ で母平均値の両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする.
3. 帰無仮説のもとで, 標本サイズ $n$ の標本から計算する検定統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
4. $T$ の実現値 $t$ を標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 $S^2$ の実現値から計算すると $T = \cdots$.
5. 棄却域は $|t| >= F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ である.
6. (結論) 帰無仮説を棄却する/できない, 母平均値は $\mu \neq \mu_0$ と結論する/できない.

棄却域は実軸の部分集合 $(-\infty, -u) \cup (u, +\infty)$. ここで $u$ は,
$P(t < -u \text{または} u < t) = \alpha$ であるように, $u = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ と決めた.




t 分布では $F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = -F^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_k(\frac{\alpha}{2})$.

## L14-Q1
## Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 $\mu$ が $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」すなわち「$\mu = \mu_0$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq \mu_0$」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を $S^2$ とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{\frac{1}{5}S^2}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. 検定統計量のこの標本での実現値
$t = \frac{\overline{X}-55}{\sqrt{\frac{1}{5}S^2}} = \frac{49-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$

5. 境い目は
$F^{-1}(1-0.05/2) = t_4(0.05/2) =$`rvt.ppf(1-0.05/2)`$= 2.776$ より，
棄却域は $|t| > 2.776$.
棄却域は，$t < F^{-1}(0.05/2)$ または $F^{-1}(1-0.05/2) < t$ とも書ける.
6. $|-6.708| > 2.776$ であり，実現値 $t$ は棄却域に含まれるので，帰無仮説を棄却する．ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる，と結論する.
(注: このことを，「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である，母平均値 $\mu$ は 55g と有意に異なる，母平均値 $\mu$ と 55 の間には有意差がある，有意な標本である，など)

重さは負にならないし，正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが，ここは練習ってことで．世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが，数理の人はおかしさを認識できるように.

岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159)，問題 2(p.160)

# L14-Q2

## Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには，ドーナツ販売開始前には，9:00–10:00 に平均 $196$ 人の客が来店していた．ドーナツ販売開始後の 4 日間，来店客数は次の通りだった．$204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える．ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 $0.05$ で考える．

# ここまで来たよ

13 母平均値の区間推定・線形モデル

14 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)

# 母平均値・母分散・母比率・適合度・独立性の検定

| | 両側 | 片側 |
|---|---|---|
| 母平均値 | **両側 t 検定**<br>岩薩林 確率・統計 問題 2(p.160) | **片側 t 検定**<br>岩薩林 確率・統計 例題 7.2(p.159) |
| 母分散 | **両側カイ二乗検定**<br>岩薩林 確率・統計 例題 7.4(p.165) | **片側カイ二乗検定**<br>岩薩林 確率・統計 問題 5(p.166)<br>岩薩林 確率・統計 §7 練習問題 1(3) |
| 母比率 | **両側二項検定**<br>岩薩林 確率・統計 練習問題 2(p.173) | **片側二項検定**<br>岩薩林 確率・統計 例題 7.7(p.172) 岩薩林 確率・統計 練習問題 3(p.173) |
| 適合度 | NA | **片側カイ二乗検定**<br>岩薩林 確率・統計 §8.3 |
| 独立性 | NA | **片側カイ二乗検定**<br>岩薩林 確率・統計 §8.4 |
| 母平均値の差 | **両側 (いろいろ) 検定**<br>岩薩林 確率・統計 §8.1 | **片側 (いろいろ) 検定** |
| 母分散の比 | **両側 F 検定**<br>岩薩林 確率・統計 §8.2 | **片側 F 検定** |

# 母比率の検定 I

$p$ と書いてた母比率, 二項分布の $X \sim \mathrm{B}(p,n)$ の $p$ を, 今日は $r$ と書きます

**例 (母比率の検定のアイデア)**

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率)$r = 1/5$ だと言われているが, もっと表がでちゃう気がする.
50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ, 表 $X = 15$ 回表が出た.
こんな「稀な」ことが起きるってことは, そうに違いない!

$\rightsquigarrow$ これ, 統計的仮説検定として定式化できる考え方
前提 表が出る回数 $X \sim \mathrm{B}(r,n)$.
帰無仮説 $r = \frac{1}{5}$ , 対立仮説 $r > \frac{1}{5}$.

# 母比率の検定 II

帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで, $X = 15$ はとても稀 (矛盾) と言いたい. 確率統計 I(2024)L14

$$P(X = 15) = \frac{50!}{15!(50-15)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-15} = 0.0299 \quad \text{稀じゃん}$$

ちょっと待て. 特定の回数が出ることじたい稀. 上の確率は
1/場合の数 $= 1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい $50 \cdot \frac{1}{5}$ 回

$$P(X = 10) = \frac{50!}{10!(50-10)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-10} = 0.1398$$

だって稀じゃん?
これ $(X = 15)$ 以上に極端なことが起きる確率を考えよう.

$$P(15 \leq X \leq 50) = \sum_{k=15}^{50} P(X = k)$$

# 母比率の検定 III

36 個も加えるの? …これを計算機などで直接計算してしまう手もある正確確率検定

正規近似による計算 確率統計 I(2024)L09

$\mathrm{E}[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10, \mathrm{V}[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$
中心極限定理より, '近似的に' $X \sim \mathrm{N}(10, 8)$. $Z = \frac{X-10}{\sqrt{8}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 50) =& P\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}} \leq Z < +\infty\right) \\ =& \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right) \\ =& 1 - \mathsf{cdf}\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - 0.96145 = 0.0385. \end{aligned}$$

確率統計 I(2024)L09

$P(X \geq 15) = 0.0385$ (これがあとで出てくる p 値) が稀と思うかは主観.
けんかにならないように, 計算し始める前に基準を決めておく. それが,

# 母比率の検定 IV

有意水準 $\alpha = 0.05$ or $0.01$. そのときのぎりぎりの $z$ の値が棄却域の境い目.

上で出てきた, $Z$ は, 分子分母を $n = 50$ で割ると,

$$\frac{15-10}{\sqrt{8}} = \frac{\frac{15}{50} - \frac{10}{50}}{\sqrt{\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{4}{5}}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot r_0 \cdot (1 - r_0)}}$$

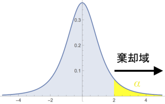
という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.
ただし, 平方根の中にあるのは帰無仮説の母比率 $r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率は $\hat{r}$.

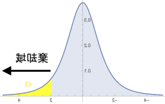
# 母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似) 岩薩林 確率・統計 定理 7.6(p.171)

## 母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似) 岩薩林 確率・統計 定理 7.6(p.171)

前提 $X \sim \mathrm{B}(r, n)$.

1. 有意水準 $\alpha$ で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ ( or $r < r_0$) とする.
3. 帰無仮説のもとで，サイズ $n$ の標本から計算する検定統計量 $Z = \frac{X - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう ($n$ 大のとき).
   $\hat{r} = \frac{X}{n}$: 標本比率, $r_0$: (帰無仮説の) 母比率.
4. この標本に対して検定統計量 $Z$ の実現値 $z$ は…
5. 棄却域は $z > \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ (or $z < \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$).
6. 「(…) より帰無仮説を棄却する/できない．よって母比率 $r > r_0$ ( or $r < r_0$) と結論する/できない.

上側片側


下側片側


ふつうじゃない Trial L14 非参照テストではなく, 2024-08-05 月 20:00 までにアップロードするレポート.

- 練習問題 L14-01, L14-02 に合格すると, 個人別レポート問題の取得や提出が可能になる.
- 趣旨: 検定の長い文を (参照ありで) 書けることを確かめる必要. 非参照や短時間のテストで確認することが難しい.

ふつうじゃない Trial L15 非参照テストではなく, 2024-08-05 月 09:15 までに解答する Moodle の問題.

- 練習問題 L15-01, L15-02 に合格した後，(受験回数，受験時間に制限はあるが練習問題に似た)TrialL15-01, 作文の Trial L15-02 に回答.
- 趣旨: 対面 Trial をする回がない

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト用途:Moodle 成績評価方法参照.
2024-08-05 月 09:15-10:15, 参照なし. 7-002. 事前の出欠連絡不要. 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし. Trial L01-08 の出題計画をあわせたもの. 要学生証, 個人別座席指定.
すべて持込不可, ただし， 岩薩林 確率・統計 pp. xii,xiii の公式集を印刷して当日配布
災害や交通機関などにより全学的に定期試験が中止・延期になるときは同様に中止・延期.
成績評価考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2024-07-31 月 20:00 までに提出. Trial L13 までの採点結果は 2024-07-31 ごろまでに公表します. Trial L14, L15 の採点結果の公表は 2024-08-05 には間に合いません.