

確率変数の標準化・正規分布

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計Ⅰ L05(2026-05-18 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-29 Fri 06:49 JST hig"

今日の目標

- 確率変数の1次式による変換を説明できる
久保川 統計学入門 §5.5 確率分布を標準化して確率や分位数を
計算できる 久保川 統計学入門 p.120



L04-Q1

TA Prob and Sol: 連続一様分布の分位数関数

連続一様分布 $U(-4, 4)$ にしたがう確率変数 X を考える.

- ① X の累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
- ② X の分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
- ③ 確率 $P(X \geq d_1) = 0.05$ となる d_1 を F^{-1} で表わし, 求めよう.
- ④ 確率 $P(|X| \geq d_2) = 0.05$ となる d_2 を F^{-1} で表わし, 求めよう.

略解

①

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -4) \\ \frac{x+4}{8} = \frac{x-(-4)}{4-(-4)} & (-4 \leq x \leq 4) \\ 1 & (4 < x) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad F^{-1}(p) = -4 + 8p.$$

$$\textcircled{3} \quad P(X \geq d_1) = P(d_1 \leq X < +\infty) = 1 - F(d_1). \text{ よって, } \\ F(d_1) = 0.95. \quad d_1 = F^{-1}(0.95) = 3.6.$$

または, $f(x)$ が偶関数であることから,

$$P(X \geq d_1) = P(X \leq -d_1) = F(-d_1) \text{ より, } \\ d_1 = -F(0.05) = -(-3.6).$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) \text{ が偶関数であることから,}$$

$$P(|X| \geq d_2) = P(X \leq -d_2) + P(X \geq d_2) = 2 \times P(X \leq -d_2). \text{ よっ} \\ \text{て, } d_2 = -F^{-1}(0.05/2). \text{ または, } d_2 = F^{-1}(1 - 0.05/2).$$

L04-Q2

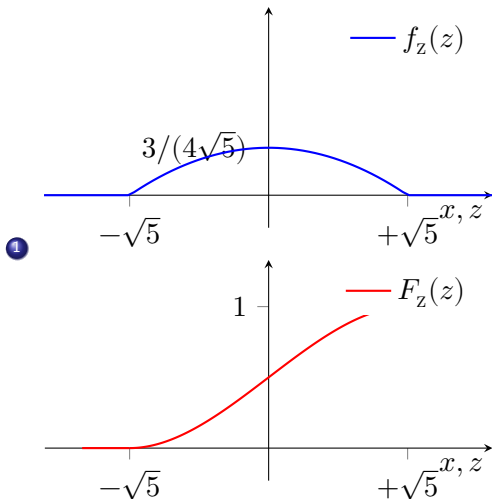
TA Prob and Sol: 確率密度関数が 2 次関数の分布

連続型確率変数 Z の確率密度関数を $f(z)$, 累積分布関数を $F(z)$ とする.

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

- ① $f(z), F(z)$ のグラフの概形を描こう.
- ② モーメント $E[Z^k]$, 母平均値 $E[Z]$, 母分散 $\text{Var}(Z)$ を求めよう.
- ③ 確率 $P(|Z| \leq 1)$ を $F(z)$ で表わし, 数値で求めよう.
- ④ $P(Z \geq d_1) = 0.05$ となる d_1 を F^{-1} で表わし, 数値で求めよう.
- ⑤ $P(|Z| \geq d_2) = 0.05$ となる d_2 を F^{-1} で表わし, 数値で求めよう.

略解



- ② $E[Z^k] = (1 + (-1)^k) \frac{3}{4} \cdot 5^{k/2} \left(-\frac{1}{3+k} + \frac{1}{1+k}\right)$. $E[Z] = 0$ は $f(z)$ が偶関数であることからわかる.
- ③ $P(|Z| \leq 1) = F(1) - F(-1) = 0.626$. (電卓 or Colab).

④ $d_1 = F^{-1}(1 - 0.05) = 1.63$. (Colab).

⑤ $f(z)$ は偶関数なので, $d_2 = F^{-1}(1 - 0.05/2) = 1.81$. (Colab).

L04-Q3

TA Prob and Sol:2 次関数の定める連続型分布

連続型確率変数 Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_Z(z)$ とする．

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

- ① $X_1 = Z + 3$ の確率密度関数 $f_1(x)$ を求めグラフを描こう．
- ② $X_2 = 2Z$ の確率密度関数 $f_2(x)$ を求めグラフを描こう．
- ③ $X_3 = 2Z + 3$ の平均と分散を求めよう． X_3 の確率密度関数 $f_3(x)$ を求めグラフを描こう．
- ④ 確率 $P(4 < X_3 \leq 5)$ を $F_Z(z)$ で表そう．
- ⑤ $P(X_3 \leq d) = 0.01$ となる d を $F_Z^{-1}(p)$ で表そう．

略解

$$\textcircled{1} \quad E[X_1] = E[Z] + 3 = 3. \quad \text{Var}(X_1) = \text{Var}(Z) = 1.$$

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}((x-3)^2 - 5) & (|x-3| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad E[X_2] = 2E[Z] = 0. \quad \text{Var}(X_2) = 2^2\text{Var}(Z) = 2^2.$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{3}{20\sqrt{5}}((\frac{x}{2})^2 - 5) & (|\frac{x}{2}| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$$\textcircled{3} \quad E[X_3] = 2E[Z] + 3 = 3. \quad \text{Var}(X_3) = 2^2\text{Var}(Z) = 2^2.$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{3}{20\sqrt{5}}\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 5\right) & (|\frac{x-3}{2}| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$$\textcircled{4} \quad P(4 < X_3 \leq 5) = P(4 < 2Z + 3 \leq 5) = P(\frac{4-3}{2} < Z \leq \frac{5-3}{2}) = F_Z(1) - F_Z(\frac{1}{2}).$$

$$\textcircled{5} \quad 0.01 = P(X_3 \leq d) = P(2Z + 3 \leq d) = P(Z \leq \frac{d-3}{2}) = F_Z(\frac{d-3}{2}).$$

$$\frac{d-3}{2} = F_Z^{-1}(0.01). \quad d = 2F_Z^{-1}(0.01) + 3.$$

復習：グラフの平行移動と拡大縮小

$y = f(x)$ のグラフを,

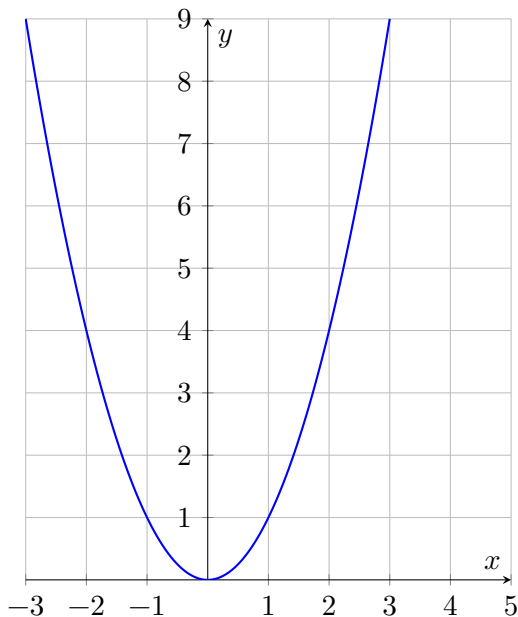
- 横に b 平行移動すると $y = f(x - b)$.
- 横に b , 縦に d 平行移動すると $y - d = f(x - b)$.
- y 軸を中心に横に a 倍すると, $y = f(\frac{x}{a})$.
- y 軸を中心に横に a 倍, x 軸を中心に縦に c 倍すると, $\frac{y}{c} = f(\frac{x}{a})$.
- まず y 軸を中心に横に a 倍, x 軸を中心に縦に c 倍, 次に横に b 平行移動すると, $\frac{y}{c} = f(\frac{x-b}{a})$.

$y = x^2$

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot (\frac{x-b}{a})^2$

$$y = x^2,$$
$$b = 3, d = 0,$$
$$a = 2, c = 1/2.$$

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2.$
- $y = c \cdot \left(\frac{x-b}{a}\right)^2$

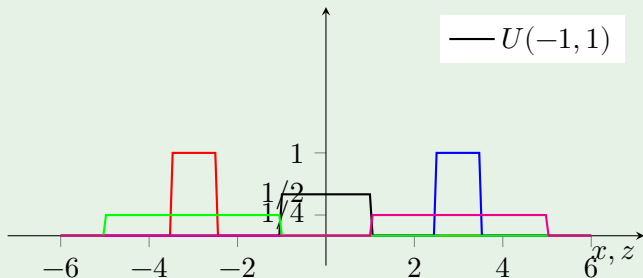


L05-Q1

Quiz(連続一様分布にしたがうの確率変数の1次変換)

連続一様分布 $U(-1, 1)$ にしたがう確率変数 Z を考える. Z の確率密度関数 $f(z)$ は黒で描かれている.

- ① 確率変数 $X = 2Z + 3$ の確率密度関数を選ぼう.
- ② 関数 $\frac{1}{1/2} f(\frac{x+3}{1/2})$ を選ぼう.



ここまで来たよ

4 確率変数の 1 次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布

- 確率変数の 1 次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

2 次関数の確率密度関数で表される分布 I

前回同様、連続型確率変数 Z が次の分布にしたがうとする.

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

$X = aZ + b$ は次にしたがう.

久保川 統計学入門 公式 5.24(p.123)

$$\begin{aligned} f(x; b, a^2) &= \frac{1}{a} f_Z\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}a} \left(\left(\frac{x-b}{a} \right)^2 - 5 \right) & (|\frac{x-b}{a}| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|\frac{x-b}{a}| > \sqrt{5}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}a} \left(1 - \frac{(x-b)^2}{5a^2} \right) & (b - \sqrt{5}a \leq x \leq b + \sqrt{5}a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \end{aligned}$$

z は, $a = 1, b = 0$ とおいた場合.

この授業内だけの定義

定義

上の確率密度関数 $f(x; b, a^2)$ を持つとき, X は分布 $Q(b, a^2)$ にしたがう, といい, $X \sim Q(b, a^2)$ とかく.

b, a を, 分布のパラメタ, 母数という.

命題 ($Q(b, a^2)$ の性質)

$X \sim Q(b, a^2)$ のとき,

$E[X] = b, \text{Var}(X) = a^2$.

確率密度関数 $f(x; b, a^2)$ は, 幅 $2\sqrt{5}a$ の区間 $b - \sqrt{5}a \leq x \leq b + \sqrt{5}a$ の外では 0.

ここまで来たよ

4 確率変数の1次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布

- 確率変数の1次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

確率変数の標準化

久保川 統計学入門 p.120

定義 (標準化された確率変数)

確率変数 Z が, $E[Z] = 0, \text{Var}(Z) = 1^2$ を満たすとき, Z は標準化された確率変数という.

任意の確率変数 X は, 1 次式で, 標準化された確率変数に変換できる.
このとき, 確率密度関数のグラフは, 拡大, 移動しただけで, 形は同じ.

定義 (確率変数の標準化)

久保川 統計学入門 p.120

任意の確率変数 X に対して, $\mu = E[X], \sigma^2 = \text{Var}(X), \sigma > 0$ とする.
 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ は標準化された確率変数. 「 Z は X を標準化した確率変数」という.

$$E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = 0,$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 1.$$

確率変数の標準化とは

確率密度関数 $f_Y(x)$ を横方向に拡大縮小して‘幅’1にする（副産物として縦にも拡大縮小する），平行移動して平均値‘重心’の位置を0にすること

逆に，標準化された変換前 Z から変換後 $X = aZ + b$ を考えると， $E[X] = b$, $\text{Var}(X) = a^2$.

命題

$X \sim Q(b, a^2)$ を標準化すると， $Z \sim Q(0, 1^2)$ になる．

逆に，標準化された $Z \sim Q(0, 1^2)$ から，平行移動拡大縮小 $X = aZ + b$ で，すべての $X \sim Q(b, a^2)$ を作れる．

母数を持つ分布の，標準ナントカ，は，代表選手，テンプレートのようなもの．

L05-Q2

Quiz(2 次関数の定める連続型分布の標準化)

連続型確率変数 $X \sim Q(3, 2^2)$ の確率密度関数 $f_X(x)$ が次で与えられる.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5} \cdot 2} \left(1 - \frac{(x-3)^2}{5 \cdot 2^2}\right) & (3 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① X を標準化する 1 次式を求めよう. 標準化された Z の累積分布関数を $F_Z(z)$ とする.
- ② 確率 $P(2 \leq X \leq 4)$ を Z の確率で書こう. $F_Z(z)$ を使って表そう.
- ③ 確率 $P(X \leq d) = 0.05$ となる d を逆関数 $F_Z^{-1}(z)$ を用いて表そう.

L05-Q3

Quiz(連続一様分布の標準化)

連続型確率変数 X は連続型一様分布 $U(3, 9)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ．

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (3 \leq x \leq 9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① 母平均値 $E[X]$ ，母分散 $\text{Var}(X)$ を求めよう（記憶している公式で）．
- ② 確率変数 X を標準化しよう．つまり，標準化された確率変数 Z を X の1次式で表そう． Z と X の確率密度関数のグラフを描こう．
- ③ 確率 $P(X \leq 5)$ を Z の確率で書き換えよう．求めよう．

ここまで来たよ

4 確率変数の1次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布

- 確率変数の1次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

標準正規分布 standard normal distribution $N(0, 1^2)$ の性質

定義 (標準正規分布 $N(0, 1^2)$) 久保川 統計学入門 式 (5.2)

次の確率密度関数を持つ確率変数 Z を，標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたかうという．

$$f_Z(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz'.$$

ϕ, Φ は f, F のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
 $\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．

Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`

Excel で `=norm.s.dist(z,FALSE)`

標準正規分布 $Z \sim N(0, 1^2)$ の確率密度関数と母期待値

$\phi(z)$ は偶関数 (y 軸に関して対称), $|z| \rightarrow \pm\infty$ で z 軸に漸近.

$\phi(0) \times$	$\phi(\pm 1)/\phi(0)$	$\phi(\pm 2)/\phi(0)$	$\phi(\pm 3)/\phi(0)$	$\phi(\pm\infty)/\phi(0)$
$(2\pi)^{-1/2} \times$	$e^{-1/2}$	$e^{-4/2}$	$e^{-9/2}$	$e^{-\infty}$
$0.4 \times$	0.6	0.14	0.01	$\rightarrow 0$

k 次のモーメント (k : 自然数)

$$E[Z^{2k-1}] = 0, \quad \text{奇関数}$$

$$E[Z^{2k}] = (2k-1)!! \text{部分積分}$$

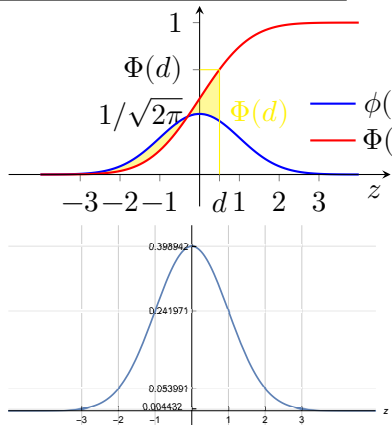
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1),$$

$$E[Z^0] = 1, \quad \text{久保川 統計学入門 p.111 微積分 II}$$

$$E[Z] = 0, \quad \text{久保川 統計学入門 公式 5.17}$$

$$\text{Var}(Z) = 1.$$

たしかに, Z は標準化された確率変数.



標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z') \, dz' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} \, dz' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$, 分位数関数 確率統計 I(2025)L03 $\Phi^{-1}(q)$ は LearnMoodle Python による正規分布や 久保川 統計学入門 公式 5.9, 数値表 (p.290) から．数値表は $z \geq 0$ だけなので $z < 0$ は, $\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$ を利用して求める． 高校 数学 C

```

1 from scipy import stats
2 rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0, 1^2)
3 rvz.cdf(d) # Φ(d)
4 rvz.ppf(q) # Φ⁻¹(q)

```

z	$\Phi^{-1}(q)$	$-\infty$	$-z'$	0	$+\infty$
$\Phi(z)$	q	0	$1 - \Phi(z')$	1/2	1

上側分位点 $z_p = \Phi^{-1}(1 - p)$ は $P(Z > z_p) = p$ となる点 久保川 統計学入門 公式 5.9

L05-Q4

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

- ① 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう. Python または表で小数として求めよう.
- ② 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう.
- ③ 確率 $P(-1.23 < Z \leq 0)$ を, 累積分布関数 $\Phi(z)$ ただし, $z > 0$ で表そう.
- ④ 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる d を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう. Python または表で求めよう.

久保川 統計学入門 例題 5.12

