

正規分布

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L06(2026-05-25 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-27 Wed 10:14 JST hig"

今日の目標

- 標準正規分布の母期待値, 確率を求められる

久保川 統計学入門 §5.3.2

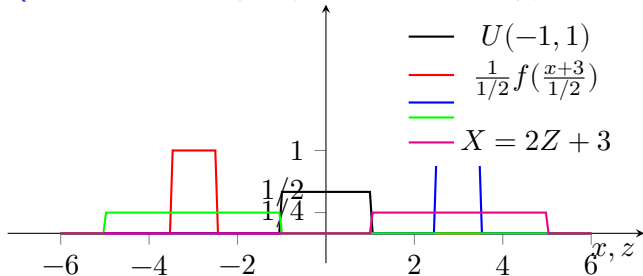
- 一般の正規分布を標準化して, 確率, 分位数を求められる

久保川 統計学入門 §5.3.2



L05-Q1

Quiz 解答: 連続一様分布にしたがうの確率変数の1次変換



L05-Q2

Quiz 解答: 2 次関数の定める連続型分布の標準化

- ① $E[X] = 3, \text{Var}(X) = 2^2$ なので, $Z = \frac{X-3}{2}$ とすると, $Z \sim Q(0, 1^2)$.

$$\textcircled{2} \quad P(2 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{2-3}{2} \leq \frac{X-3}{2} \leq \frac{4-3}{2}\right) = P\left(\frac{2-3}{2} \leq Z \leq \frac{4-3}{2}\right) = F_Z\left(+\frac{1}{2}\right) - F_Z\left(-\frac{1}{2}\right).$$

同じことだが, $P(2 \leq X \leq 4) = P(2 \leq 2Z + 3 \leq 4) = P\left(\frac{2-3}{2} \leq Z \leq \frac{4-3}{2}\right) = F_Z\left(+\frac{1}{2}\right) - F_Z\left(-\frac{1}{2}\right).$

$$\textcircled{3} \quad P(X \leq d) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{d-3}{2}\right) = 0.05 \Leftrightarrow F_Z\left(\frac{d-3}{2}\right) = 0.05.$$

逆関数を用いて $\frac{d-3}{2} = F_Z^{-1}(0.05)$. $d = 2F_Z^{-1}(0.05) + 3$.

0.05 分位点 $z = F_Z^{-1}(0.05)$ を $x = 2z + 3$ で変換したと思ってもよい.

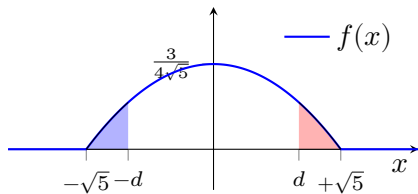
ここまで来たよ

5 確率変数の標準化

- ### 6 正規分布
- 左右対称な分布
 - 標準正規分布
 - 一般の正規分布

確率密度関数が偶関数である分布 I

確率密度関数 $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$, グラフが y 軸に関して対称) である分布を考える (累積分布関数 $F(x)$ はもちろん偶関数でない).



$$P(X \leq -d) = P(X \geq d)$$

$$P(-\infty < X \leq -d) = P(d \leq X < +\infty)$$

$$F(-d) - 0 = 1 - F(d)$$

確率密度関数が偶関数である分布 II

- $F(-d) + F(d) = 1$ という式も納得いく
- $d = 0$ を代入して得られる $F(0) = \frac{1}{2}$ も納得いく

確率密度関数が偶関数であるとき、確率の答から $F(0)$ や、 $F(\text{負})$ を消して、すべて $F(\text{正})$ で書くことができる。

- これらの性質は、1 次式 $XaZ + b$ 関数で変換して、対称軸が $y = b$ になったものにも一部遺伝する。

L06-Q1

Quiz(対称な分布)

連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ は偶関数である．確率 $P(-2 \leq X \leq 3)$ を，累積分布関数 $F(x)$ ただし $x > 0$ で表したものを 1 つ選ぼう．

- $F(3) - F(2)$
- $F(3) + F(2) - 1$
- $F(3) + F(2)$
- $F(3) - F(2) + 1$
- $2F(\frac{5}{2})$

ここまで来たよ

5 確率変数の標準化

6 正規分布

- 左右対称な分布
- 標準正規分布
- 一般の正規分布

標準正規分布 standard normal distribution $N(0, 1^2)$ の性質

定義 (標準正規分布 $N(0, 1^2)$) 久保川 統計学入門 式 (5.2)

次の確率密度関数を持つ確率変数 Z を，標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたかうという．

$$f_Z(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz'.$$

ϕ, Φ は f, F のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
 $\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．

Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`

Excel で `=norm.s.dist(z,FALSE)`

2 次関数で表される標準化された分布 $f_z(z)$ の比較

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ \text{Taylor at } x=0 &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{z^2}{2}\right), \\ f_z(z) &= \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{z^2}{5}\right)\end{aligned}$$

類似

$z = 0$ 近くで上に凸. 偶関数 (y 軸に関して対称),

違い

$\phi(z) > 0, f_z(z) \geq 0$ (場合わけで強制的に).

$|z| \rightarrow \pm\infty$ で $\phi(z)$ は z 軸に漸近.

$f_z(\pm\sqrt{5}) = 0$ から $2\sqrt{5}$ が幅.

$\phi(\pm\sqrt{2}) = e^{-1}\phi(0) = 0.4$ から $2\sqrt{2}$ くらいが幅.

標準正規分布 $Z \sim N(0, 1^2)$ の確率密度関数と母期待値

$\phi(0) \times$	$\frac{\phi(\pm 1)}{\phi(0)}$	$\frac{\phi(\pm\sqrt{2})}{\phi(0)}$	$\frac{\phi(\pm 2)}{\phi(0)}$	$\frac{\phi(\pm 3)}{\phi(0)}$	$\frac{\phi(\pm\infty)}{\phi(0)}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$	$e^{-1/2}$	e^{-1}	$e^{-4/2}$	$e^{-9/2}$	$e^{-\infty}$
$0.4 \times$	0.6	0.38	0.14	0.01	$\rightarrow +0$

k 次のモーメント (k : 自然数)

$$E[Z^{2k-1}] = 0, \quad \text{奇関数}$$

$$E[Z^{2k}] = (2k-1)!! \text{部分積分}$$

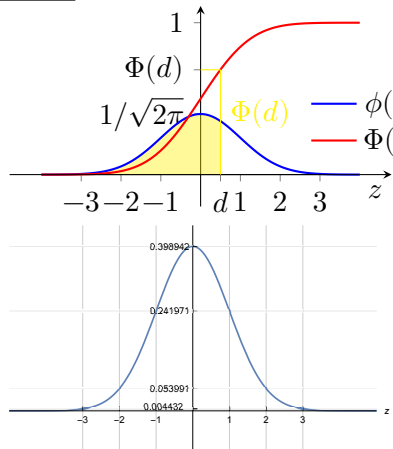
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1),$$

$$E[Z^0] = 1, \quad \text{久保川 統計学入門 p.111} \quad \text{微積分 II}$$

$$E[Z] = 0, \quad \text{久保川 統計学入門 公式 5.17}$$

$$\text{Var}(Z) = 1.$$

たしかに、 Z は標準化された確率変数.



標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z') \, dz' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} \, dz' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$, 分位数関数 確率統計 I(2025)L03 $\Phi^{-1}(p)$ は LearnMoodle Python による正規分布や 久保川 統計学入門 公式 5.9, 数値表 (p.290) から．数値表は $z \geq 0$ だけなので $z < 0$ は, $\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$ を利用して求める． 高校 数学 C

```

1 from scipy import stats
2 rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0, 1^2)
3 rvz.cdf(d) # Φ(d)
4 rvz.ppf(p) # Φ-1(p)

```

z	$\Phi^{-1}(q)$	$-\infty$	$-z'$	0	$+\infty$
$\Phi(z)$	q	0	$1 - \Phi(z')$	1/2	1

上側分位点 $z_p = \Phi^{-1}(1 - p)$ は $P(Z > z_p) = p$ となる点 久保川 統計学入門 公式 5.9

L06-Q2

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

- ① 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう. Python または表で小数として求めよう.
- ② 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう.
- ③ 確率 $P(-1.23 < Z \leq 0)$ を, 累積分布関数 $\Phi(z)$ ただし, $z > 0$ で表そう.
- ④ 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる d を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう. Python または表で求めよう.

久保川 統計学入門 例題 5.12

ここまで来たよ

5 確率変数の標準化

6 正規分布

- 左右対称な分布
- 標準正規分布
- 一般の正規分布

一般の正規分布 $N(b, a^2)$

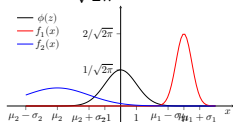
$Z \sim N(0, 1^2)$ に対して, $X = aZ + b$ を考える. 久保川 統計学入門 公式 5.17

$$E[X^0] = 1,$$

$$\mu = E[X] = E[aZ + b] = b,$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \text{Var}(aZ + b) = a^2.$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \rightsquigarrow f_X(x) = \frac{1}{a} f_Z\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$



定義 (一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 久保川 統計学入門 式 (5.1))

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を, 母平均値 μ , 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (normal distribution) にしたがるという.

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Python で `scipy.stats.norm(loc=b, scale=a)`.

$X \sim N(b, a^2)$ を標準化すると $Z \sim N(0, 1^2)$.

\$Q(b, a^2)\$ と \$N(b, a^2)\$ の対比

どちらも, $E[X] = b, \text{Var}(X) = a^2$.

$$X \sim N(b, a^2) \quad f_X(x; \textcolor{red}{b}, \textcolor{blue}{a}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\textcolor{blue}{a}} e^{-\frac{(x-\textcolor{red}{b})^2}{2\textcolor{blue}{a}^2}}$$

$$\stackrel{\text{Taylor at } x=0}{\cong} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\textcolor{blue}{a}} \left(1 - \frac{(x - \textcolor{red}{b})^2}{2\textcolor{blue}{a}^2} \right)$$

$$X \sim Q(b, a^2) \quad f_X(x; \textcolor{red}{b}, \textcolor{blue}{a}^2) = \frac{3}{4\sqrt{5}\textcolor{blue}{a}} \left(1 - \frac{(x - \textcolor{red}{b})^2}{5\textcolor{blue}{a}^2} \right).$$

L06-Q3

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X が, 次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} e^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 3^2}}$$

- ① $E[X]$ を求めよう.
- ② $\text{Var}(X)$ を求めよう.
- ③ $f(x)$ のグラフを, 標準正規分布の確率密度関数 $\phi(z)$ と重ねて描こう.

Python でも描いてみよう.

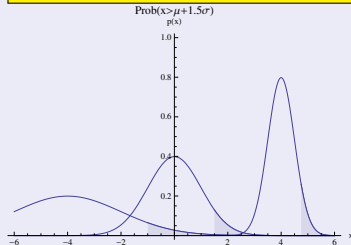
一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率

命題 (変数変換前後の確率は同じ) 久保川 統計学入門 公式 5.10

確率は変数変換, 特に標準化 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ の前後で変わらない.

斜線部の面積はどれも同じ

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



変数				下限	上限	母平均値	母分散
z	-2	0	2	$\frac{c-\mu}{\sigma}$	$\frac{d-\mu}{\sigma}$	0	1^2
x	$\mu - 2\sigma$	μ	$\mu + 2\sigma$	c	d	μ	σ^2

L06-Q4

Quiz(正規分布の確率)

確率変数 $X \sim N(3, 2^2)$, $Z \sim N(0, 1^2)$ とする.

- ① X, Z の確率密度関数の式を書こう. グラフを重ねて描こう.
- ② 母期待値 $E[X^2]$ を求めよう.
- ③ 確率 $P(X > 5) = P(c < Z \leq d)$ となるように c, d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
- ④ 確率 $P(+1 < X \leq 7) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c, d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
- ⑤ 確率 $P(+3 < X \leq 9) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c, d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
- ⑥ 確率 $P(X \leq d) = 3/4$ となる d を, 確率 $P(Z \leq d') = 3/4$ となるような d' で表そう. また, Python や表を使って小数で求めよう.

久保川 統計学入門 例題 5.13