

二項分布・独立同一分布の和

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L08(2026-06-08 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-06-08 Mon 18:13 JST hig"

今日の目標

- 独立同一分布にしたがう確率変数の和の母平均値, 母分散を求められる [久保川 統計学入門 §6.5, p.152](#)
- 二項分布の母期待値, 母分散, 確率を求められる

[久保川 統計学入門 §4.3.1, §4.3.2](#)



L07-Q1

Quiz 解答: 正規分布の分位数

$P(|Z| \geq d) = 0.05$ を満たす $d_3 = \Phi^{-1}(0.975)$.

- $\Phi^{-1}(0.05)$
- $\Phi^{-1}(0.95)$
- $\Phi^{-1}(0.975)$
- $\Phi^{-1}(0.525)$

L07-Q2

Quiz 解答: 正規分布の分位数

$P(|Z| \geq d) = 0.01$ を満たす $d_4 = \Phi^{-1}(0.995)$

- $\Phi^{-1}(0.95)$
- $\Phi^{-1}(0.99)$
- $\Phi^{-1}(0.975)$
- $\Phi^{-1}(0.995)$

L07-Q3

Quiz 解答: 多変数の確率分布の母期待値

$$\textcircled{1} \quad p(x, y) =$$

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{4}{12}$	0	$\frac{5}{12}$

$$g(x, y) = 2x^2 + e^y =$$

$y \backslash x$	1	2	3
0	$2 \cdot 1^2 + e^0$	$2 \cdot 2^2 + e^0$	$2 \cdot 3^2 + e^0$
2	$2 \cdot 1^2 + e^2$	$2 \cdot 2^2 + e^2$	$2 \cdot 3^2 + e^2$

$$E[2X^2 + e^Y] = (2 \cdot 1^2 + e^0)0 + (2 \cdot 2^2 + e^0)\frac{2}{12} + (2 \cdot 3^2 + e^0)\frac{1}{12} \\ + (2 \cdot 1^2 + e^2)\frac{4}{12} + (2 \cdot 2^2 + e^2)0 + (2 \cdot 3^2 + e^2)\frac{5}{12}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{4}{12} + 0 + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}.$$

3

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/12 & (x=1) \\ 2/12 & (x=2) \\ 6/12 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 3/12 & (y=0) \\ 9/12 & (y=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ④ $E[2X^2 + e^Y] = 2E[X^2] + E[e^Y] \stackrel{\text{周辺分布}}{=} 2(1^2 \cdot \frac{4}{12} + 2^2 \cdot \frac{2}{12} + 3^2 \cdot \frac{6}{12}) + (e^0 \cdot \frac{3}{12} + e^2 \cdot \frac{9}{12}).$
- ⑤ $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 \stackrel{\text{周辺分布}}{=} \frac{66}{12} - (\frac{13}{12})^2 = \frac{29}{36}.$
- ⑥ $E[XY] \stackrel{\text{同時分布}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{19}{6}.$
- ⑦ $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{19}{6} - \frac{26}{12} \cdot \frac{18}{12} = -\frac{1}{12}.$

L07-Q4

Quiz 解答:2 変数の独立でない確率分布の母期待値

- ① $E[(X+2)(Y+3)] = E[XY + 3X + 2Y + 6] = E[XY] + 3E[X] + 2E[Y] + 6E[1] = 25 + 9 + 20 + 6 = 60.$
- ② $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 25 - 3 \cdot 10 = -5.$
 $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ を展開しても同じ結果.

L07-Q5

Quiz 解答: 独立な確率変数の母期待値

- ① X, Y は独立なので $E[XY] \stackrel{\text{IE1}}{=} E[X]E[Y] = 2 \cdot 3.$
- ② X, Y は独立なので $\text{Cov}(X, Y) \stackrel{\text{IC1}}{=} 0.$
- ③ $E[(-2X + 3Y)(X + 5Y)] \stackrel{\text{E5}}{=} E[-2X^2] + E[-7XY] + E[15Y^2] \stackrel{\text{V1, IE1}}{=} -2(\text{Var}(X) + E[X]^2) - 7E[X]E[Y] + 15(\text{Var}(Y) + E[Y]^2) = 240.$
- ④ X, Y は独立なので $\text{Var}(g_1(X) + g_2(Y)) \stackrel{\text{IC2}}{=} \text{Var}(g_1(X)) + \text{Var}(g_2(Y))$ であることに注意して, $\text{Var}(-2X + 3Y) \stackrel{\text{IC2}}{=} \text{Var}(-2X) + \text{Var}(3Y) \stackrel{\text{V2}}{=} (-2)^2 \text{Var}(X) + 3^2 \text{Var}(Y) = 119.$

L08-Q1

Quiz(確率変数の期待値の計算)

確率変数 X, Y の期待値についての次の等式の等号 '=' のうち,

- つねに正しいものを D ,
- X, Y が独立であるときにはつねに正しいものを I ,
- X, Y が独立であってもつねには正しくないものを $\neq$,

とマークしよう.

$$E[X^4 Y^4] = E[X^4] \times E[Y^4] = E[X^2]^2 \times E[Y^2]^2.$$

ここまで来たよ

7 多変数の確率分布

8 二項分布・独立同一分布の和

- 確率変数の和
- ベルヌーイ分布
- 独立同一分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布

確率変数の和の分散

確率変数 X, Y に対して, $S = X + Y$ とする.

$y \backslash x$	2	4
1	1/15	4/15
3	2/15	8/15

 $\leadsto$

s	$p(s)$
3	1/15
5	2/15 + 4/15
7	8/15

$$E[S] = E[X] + E[Y],$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= E[(X + Y)^2] - E[X + Y]^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X]^2 + 2E[X]E[Y] + E[Y]^2) \\ &= \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

X, Y が独立のとき

$$\text{Var}(X + Y) \stackrel{\text{独立}}{=} \text{Var}(X) + 0 + \text{Var}(Y)$$

復習

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X).$$

L08-Q2

Quiz(確率変数の独立性)

独立な確率変数 X, Y について, 常に成立する式に○, 常に成立するとは限らない等式に × をつけよう.

- ① $E[X^4 Y^4] = E[X^4] \times E[Y^4]$.
- ② $E[(X^2 + Y)X] = E[X^2 + Y] \times E[X]$.
- ③ $\text{Var}(X + X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.
- ④ $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

ここまで来たよ

7 多変数の確率分布

8 二項分布・独立同一分布の和

- 確率変数の和
- **ベルヌーイ分布**
- 独立同一分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布

ベルヌーイ分布

久保川 統計学入門 §4.3.1

定義 (ベルヌーイ分布)

久保川 統計学入門 §4.3.1

離散型確率変数 X の, パラメタ p のベルヌーイ分布 $Ber(p)$ は次の確率関数で与えられる

$$P(X = x) = p(x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x} = \begin{cases} 1 - p & (x = 0) \\ p & (x = 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: **ベルヌーイ試行**=(不公平な) コイン投げ. 表がでる確率 p . 表 $x = 1$. 次に出てくる二項分布の $n = 1$ のケース: $Bin(1, p)$
大学の確率の‘サイコロ’

命題 (ベルヌーイ分布のモーメントと母分散)

久保川 統計学入門 定理 4.8

$$E[X^k] = p \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

同じベルヌーイ分布にしたがう確率変数の和

$X, Y \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Ber}(p)$ 同一分布にしたがう, かつ, 独立のとき

「赤青 2 枚の, 形は同じコイン」

$y \backslash x$	0	1
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
1	$(1-p)p$	p^2

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 2p,$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2p(1-p).$$

$X = Y \sim \text{Ber}(p)$ 上とは違う状況. このとき X, Y は独立でない.

「同じ赤コインの別名」

$y \backslash x$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

$$E[X + Y] = E[2X] = 2p, \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(2X) = 2^2 p(1-p).$$

ここまで来たよ

7 多変数の確率分布

8 二項分布・独立同一分布の和

- 確率変数の和
- ベルヌーイ分布
- 独立同一分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布

独立同一分布

定義 (独立同一分布 久保川 統計学入門 p.143,p.150)

確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が互いに独立であり、同一の分布にしたがう（周辺分布の確率関数 p_{X_i} が同じである）とき、 $X_1, \dots, X_n$ は**独立同一分布** (i.i.d. independent and identically distributed) といい、次のように書く（たとえばその分布が $Ber(p)$ の場合）。

$$X_1, \dots, X_n, \text{i.i.d.} \sim Ber(p)$$

このとき、母期待値・母分散も等しい。 $E[X_i] = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$ 。

独立同一分布にしたがう確率変数の和の性質

久保川 統計学入門 §6.5

命題 (i.i.d にしたがう確率変数の和

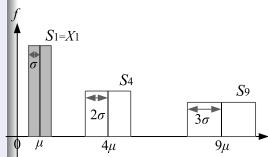
久保川 統計学入門 公式 6.19)

$X_1, \dots, X_n$, i.i.d. 母平均値 $E[X_i] = \mu$, 母分散 $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.
 和の確率変数 $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \stackrel{\text{同分布}}{=} n \times \mu.$$

$$\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{独立}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \stackrel{\text{同分布}}{=} n \times \sigma^2$$

S_n の確率 (密度) 関数はこんな感じ?



L08-Q3

Quiz(独立同一分布にしたがう確率変数の和)

ダーツで、1回投げごとに点数が得られ、 n 回投げた合計点で競うルールでプレイしている。

あるプレイヤーの i 回目の点数を確率変数 X_i とすると、 X_i は独立同分布にしたがい、 $E[X_i] = 80$, $\text{Var}(X_i) = 200$ だという。

このプレイヤーが n 回投げた合計点を確率変数 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

- ① $E[S_{10}]$, $\text{Var}(S_{10})$ を求めよう。
- ② $E[\frac{1}{10}S_{10}]$, $\text{Var}(\frac{1}{10}S_{10})$ を求めよう。
- ③ $E[\frac{1}{100}S_{100}]$, $\text{Var}(\frac{1}{100}S_{100})$ を求めよう。

ここまで来たよ

7 多変数の確率分布

8 二項分布・独立同一分布の和

- 確率変数の和
- ベルヌーイ分布
- 独立同一分布にしたがう確率変数の和
- 二項分布

二項分布

定義 (二項分布 久保川 統計学入門 例題 6.20)

$X_1, \dots, X_n$ が独立同一分布 $Ber(p)$ にしたがうとき,
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ のしたがう分布を, パラメタ n, p の二項分布 $Bin(n, p)$ という.

X_i は 1 枚のコインのうち表が出た枚数. S_n は n 枚のコインのうち表が出た枚数.

命題 (二項分布 $Bin(n, p)$ の母平均値と母分散 久保川 統計学入門 公式 4.10)

$$E[X] = np, \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, X_i \sim Ber(p), S_n \sim Bin(n, p) \text{ に対して,}$$

$$E[S_n] \stackrel{\text{いつでも}}{=} E[X_1] + \dots + E[X_n] \stackrel{\text{同一}}{=} n \times p$$

$$\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{独立}}{=} \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) \stackrel{\text{同一}}{=} n \times p(1 - p).$$

二項分布の同値な定義

高校 数学 B 久保川 統計学入門 §4.3.2

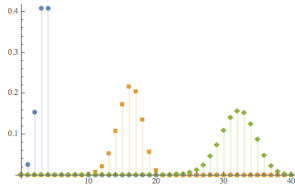
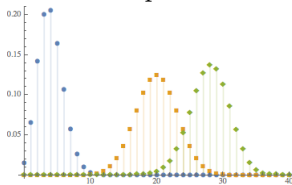
定義 (二項分布)

久保川 統計学入門 §4.3.2

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はパラメタ n, p の二項分布 $Bin(n, p)$ にしたがうという.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, 2, 3, \dots, n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: 確率 p で表の出るコインを n 回投げたとき, x 回表が出る確率.



二項係数 高校 数学 A

$${}_n C_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$Bin(40, 0.1), Bin(40, 0.5), Bin(40, 0.7), Bin(4, 0.8), Bin(20, 0.8), Bin(40, 0.8)$

二項分布 $Bin(n, p)$ の Python での扱い

Google Colab on Moodle

$X \sim Bin(n, p) \leftrightarrow \text{rvx}=\text{scipy.stats.binom}(n=n, p=p)$

```
1 from scipy import stats
2
3 # 二項分布 = binomial distribution
4 # scipy.stats.binom(n=10,p=0.3) 確率分布名=binom(n,p)
5 rvx=stats.binom(n=10,p=0.3)
6
7 # 確率(質量)関数 probability mass function 離散型に使う用語
8 rvx.pmf(x) # =p(x)
9
10 # 累積分布関数
11 rvx.cdf(x)
12
13 # 母平均値
14 rvx.mean()
```

L08-Q4

Quiz(二項分布)

確率 $\frac{2}{3}$ で表がでるコインを 100 回投げる.

- ① 表がでる回数 X は確率変数である. X のしたがう確率分布を, パラメタ $\circ\circ$ の…分布のように, または記号で答えよう.
- ② 表が 40 回でる確率を求めよう. 階乗 $n!$ とべき乗 a^b と分数 $\frac{a}{b}$ は簡単化・約分しなくてよい. $P, C, \binom{n}{k}$ などの記号は使わないで答えること.
- ③ X の母平均値, 母分散を求めよう.

久保川 統計学入門 例題 4.11

L08-Q5

Quiz(二項分布または独立同一分布)

あるスーパーのおでんセット 1 パックには, 確率 $\frac{7}{10}$ で卵が 2 個, 確率 $\frac{3}{10}$ で卵が 0 個 (!) 入っている. おでんセットを 10 パックを買ったときに得られる卵の合計の個数を確率変数 Y とする. 各パックの卵の個数は独立とする.

- 10 パック中 X パックが卵 2 個入りとする. Y を X で表そう. X のしたがる確率分布を答えよう.
- 母平均値 $E[Y]$ を求めよう.
- 母分散 $\text{Var}(Y)$ を求めよう.
- 確率 $P(Y = 16)$ を求めよう.