

中心極限定理・独立同一分布の和の正規近似

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L09(2026-06-15 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-06-22 Mon 07:23 JST hig"

今日の目標

- チェビシェフの不等式 (母平均値・母分散の正確な意味) [久保川 統計学入門 §7.3](#), 大数の法則 [久保川 統計学入門 §7.3](#), 中心極限定理 [久保川 統計学入門 §7.4](#) が説明できる
- 独立同一分布の和の確率を正規近似できる



L08-Q1

TA Prob and Sol: 確率変数の期待値の計算

確率変数 X, Y の期待値についての次の等式の等号 '=' のうち,

- つねに正しいものを D ,
- X, Y が独立であるときにはつねに正しいものを I ,
- X, Y が独立であってもつねには正しくないものを $\neq$,

とマークしよう.

$$E[X^4 Y^4] = E[X^4] \times E[Y^4] = E[X^2]^2 \times E[Y^2]^2.$$

略解

$$E[X^4 Y^4] \stackrel{\text{I}}{=} E[X^4] \times E[Y^4] \neq E[X^2]^2 \times E[Y^2]^2.$$

X, Y が独立なら $E[u(X)v(Y)] = E[u(X)]E[v(Y)]$ が成立する.

$E[u(X)v(X)] = E[u(X)]E[v(X)]$ は一般には成立しない.

L08-Q2

TA Prob and Sol: 確率変数の独立性

独立な確率変数 X, Y について, 常に成立する式に○, 常に成立するとは限らない等式に × をつけよう.

- ① $E[X^4 Y^4] = E[X^4] \times E[Y^4]$.
- ② $E[(X^2 + Y)X] = E[X^2 + Y] \times E[X]$.
- ③ $\text{Var}(X + X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.
- ④ $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

略解

数学的には○なら証明し, × なら反例を挙げるわけですが, ここでは, × は説明的なことを書いてます.

- ① ○. X, Y が独立のとき, $E[\phi_1(X)\phi_2(Y)] = E[\phi_1(X)] \times E[\phi_2(Y)]$ だから.

- ② $\times$. $E[\phi_1(X)\phi_2(Y)] = E[\phi_1(X)] \times E[\phi_2(Y)]$ を使ったように見えるが, $\phi_1(X, Y) = X^2 + Y, \phi_2(X) = X$ と, X が両方にはいつてゐるから正しい使い方ではない. 別の言い方をすると, $X^2 + Y$ と X は独立と限らないから.
- ③ $\times$. $\text{Var}(X + X + Y) = \text{Var}(2X + Y) = \text{Var}(2X) + \text{Var}(Y) = 2^2\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ なので, $\text{Var}(X) = 0$ でない限りは成立しない. 別の言い方をすると, X と X は独立ではないので, $\text{Var}(X + X) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(X)$.
- ④ $\bigcirc$. $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X + (-1)Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}((-1)Y) = \text{Var}(X) + (-1)^2\text{Var}(Y)$.

L08-Q3

L08-Q4

TA Prob and Sol: 独立同一分布にしたがう確率変数の和

ダーツで、1回投げごとに点数が得られ、 n 回投げた合計点で競うルールでプレイしている。

あるプレイヤーの i 回目の点数を確率変数 X_i とすると、 X_i は独立同分布にしたがい、 $E[X_i] = 80$, $\text{Var}(X_i) = 200$ だという。

このプレイヤーが n 回投げた合計点を確率変数 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

- ① $E[S_{10}]$, $\text{Var}(S_{10})$ を求めよう。
- ② $E[\frac{1}{10}S_{10}]$, $\text{Var}(\frac{1}{10}S_{10})$ を求めよう。
- ③ $E[\frac{1}{100}S_{100}]$, $\text{Var}(\frac{1}{100}S_{100})$ を求めよう。

略解

- ① $E[S_{10}] = 800$, $\text{Var}(S_{10}) = 2000$.

- ② $E[\frac{1}{10}S_{10}] = 80, \text{Var}(\frac{1}{10}S_{10}) = 20.$
- ③ $E[\frac{1}{100}S_{100}] = 80, \text{Var}(\frac{1}{100}S_{100}) = 2.$

L08-Q5

TA Prob and Sol: 二項分布

確率 $\frac{2}{3}$ で表がでるコインを 100 回投げる.

- ① 表がでる回数 X は確率変数である. X のしたがう確率分布を, パラメタ $\circ\circ$ の…分布のように, または記号で答えよう.
- ② 表が 40 回でる確率を求めよう. 階乗 $n!$ とべき乗 a^b と分数 $\frac{a}{b}$ は簡単化・約分しなくてよい. $P, C, \binom{n}{k}$ などの記号は使わないで答えること.
- ③ X の母平均値, 母分散を求めよう.

略解

- ① $X \sim \text{Bin}(100, \frac{2}{3})$
- ② $P(X = 40)$ を求めればよいから,

$${}_{100}C_{40}p^{40}(1-p)^{100-40} = \frac{100!}{40!60!}(\frac{2}{3})^{40}(1 - \frac{2}{3})^{60}.$$
- ③ $E[X] = n \times p = \frac{200}{3}$. $\text{Var}(X) = n \times p(1-p) = \frac{200}{9}$.

L08-Q6

TA Prob and Sol: 二項分布または独立同一分布

あるスーパーのおでんセット 1 パックには, 確率 $\frac{7}{10}$ で卵が 2 個, 確率 $\frac{3}{10}$ で卵が 0 個 (!) 入っている. おでんセットを 10 パックを買ったときに得られる卵の合計の個数を確率変数 Y とする. 各パックの卵の個数は独立とする.

- ① 10 パック中 X パックが卵 2 個入りとする. Y を X で表そう. X のしたがる確率分布を答えよう.
- ② 母平均値 $E[Y]$ を求めよう.
- ③ 母分散 $\text{Var}(Y)$ を求めよう.
- ④ 確率 $P(Y = 16)$ を求めよう.

略解

- ① $X \sim \text{Bin}(10, 0.3)$ とすると, $Y = 2X$.
- ② $E[Y] = E[2X] = 2 \times 10 \cdot 0.7 = 14$ 個.
- ③ $\text{Var}(Y) = 2^2 \text{Var}(X) = 2^2 \times 10 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 8.4$ 個².
- ④ $P(Y = 16) = P(X = 8) = \frac{10!}{2!8!} 0.7^8 0.3^2$

別解. 10 パックそれぞれに入っている卵の個数を確率変数 Y_i とすると,
 $Y = \sum_{i=1}^{10} Y_i$ で Y_i は独立同一分布にしたがうので,

$$E[Y] = 10E[Y_i], \text{Var}(Y) = 10\text{Var}(Y_i).$$

$Y_i = 2X_i$ とおくと, X_i はパラメタ $p = 0.7$ のベルヌーイ分布にしたがう. すなわち, $X_i \sim \text{Ber}(0.7)$.

$$E[X_i] = 0.7, \text{Var}(Y_i) = 0.7 \cdot (1 - 0.3) \text{ なので, } E[Y_i] = 2 \cdot 0.7,$$

$$\text{Var}(Y_i) = 2^2 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.3) \text{ である.}$$

$$\text{よって, } E[Y] = 10E[Y_i] = 14, \text{Var}(Y) = 10\text{Var}(Y_i) = 8.4.$$

確率分布の再生性

$X_i \sim \text{Bin}(1, p)$ なら, $X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ だった. さらに

定理 (二項分布の再生性 久保川 統計学入門 公式 6.21(p.144))

$$X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p), X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p).$$

自分の言葉でどうぞ

再生的とは, (適当なパラメタの) 分布にしたがう確率変数の和が, 別パラメタの同種類の分布にしたがう, というとてもよい性質.

実は正規分布は再生的 久保川 統計学入門 公式 6.21(p.144).

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

普通の分布は再生的でない. 例えば離散, 連続一様分布 (例: サイコロの目) は再生的でない.

L09-Q1

Quiz(二項分布の再生性)

確率変数 X_1, X_2 が独立なとき，次のうち，正しいものを選ぼう． $\Rightarrow$ は「ならば」を意味する．

- $X_1 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6}), X_2 \sim \text{Bin}(20, \frac{1}{6}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(30, \frac{3}{6})$
- $X_1 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6}), X_2 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6})$
- $X_1 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6}), X_2 \sim \text{Bin}(20, \frac{2}{6}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(30, \frac{2}{6})$
- $X_1 \sim \text{Bin}(10, \frac{2}{6}), X_2 \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(10, \frac{3}{6})$

ここまで来たよ

8 二項分布・独立同一分布の和

9 中心極限定理・独立同一分布の和の正規近似

- チェビシェフの不等式
- 大数の法則・中心極限定理
- 正規近似

チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

久保川 統計学入門 §7.3

定理 (チェビシェフの不等式応用形は 久保川 統計学入門 公式 7.6(p.158))

X を離散型または連続型確率変数とする.

母平均値を $\mu = E[X]$, 母分散 $\sigma^2 = \text{Var}(X)$, $a > 0$: 任意の正の実数とする.

このとき次が成立する.

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

中心とか幅とか言ってた母平均値・母標準偏差の厳密な意味づけ.

$a > 1$ と思う. 母平均値 μ からの距離が母標準偏差 $\times a$ 以上離れた値が出る確率は, $1/a^2$ 以下. 母平均値から離れるほど, 確率は小さい. 母標準偏差 σ は離れ方の基準 (分布の幅).

チェビシェフの不等式の証明 (離散型)

$$\text{「離れた } x \text{」 特徴関数 } g(x) = \begin{cases} 1 & (|x - \mu| \geq a\sigma) \\ 0 & (|x - \mu| < a\sigma) \end{cases}$$

とおく．意味を考えず $E[g(X) \cdot (X - \mu)^2]$ を定義に戻って書くと，

$$\begin{aligned} (a\sigma)^2 \times P(|X - \mu| \geq a\sigma) &= (a\sigma)^2 \sum_{|x-\mu| \geq a} p(x) \\ &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot (a\sigma)^2 p(x) \\ &\leq \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot (x - \mu)^2 p(x) \\ &\leq \sum_{x=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot (x - \mu)^2 p(x) = \text{Var}(X) = \sigma^2 \end{aligned}$$

ここまで来たよ

8 二項分布・独立同一分布の和

9 中心極限定理・独立同一分布の和の正規近似

- チェビシェフの不等式
- 大数の法則・中心極限定理
- 正規近似

独立同一分布にしたがう確率変数の和の性質

復習 確率統計 I(2026)L08 i.i.d にしたがう確率変数の和

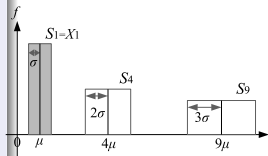
$X_1, \dots, X_n$: i.i.d. 母平均値 $E[X_i] = \mu$, 母分散 $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

和の確率変数 $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

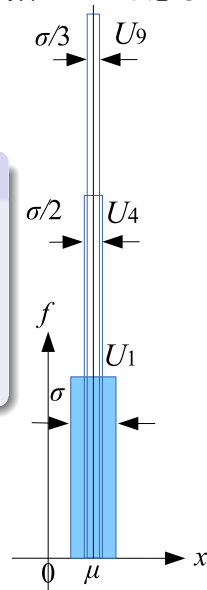
$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \stackrel{\text{同一分布}}{=} n \times \mu.$$

$$\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{独立}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \stackrel{\text{同一分布}}{=} n \times \sigma^2$$

S_n の確率密度関数はこんな感じ?



U_n の確率密度関数はこんな感じ?



i.i.d にしたがる確率変数の和の $1/n$

$X_1, \dots, X_n$: i.i.d.

新しい確率変数: $U_n = \frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

$$E[U_n] = E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n} \times n \times \mu.$$

$$\text{Var}(U_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times \sigma^2.$$

大数の (弱) 法則

$X_1, \dots, X_n$ が独立同一分布にしたがい (n 回のくじの賞金), $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ とする.

確率変数 $\bar{X} = U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ を考える (n 回の賞金の相加平均) と

$$E[U_n] = \mu, \text{Var}(U_n) = \sigma^2/n.$$

定理 (大数の (弱) 法則アバウト版 久保川 統計学入門 公式 7.8)

n が十分大きいとき確率変数 U_n は「 μ に近い値ばかり」(U_n が μ から外れる確率はゼロに近づく)

弱法則の正確な表現

定理 (大数の (弱) 法則 久保川 統計学入門 公式 7.8)

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

「 U_n は μ に**確率収束**する」

大数の弱法則の証明

U_n に対するチェビシェフの不等式を書くと,

$$P(|U_n - \mu| \geq a \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{a^2}$$

P の中の不等式の右辺を ϵ にしたい下心から $a = \frac{\epsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とすると,

$$P(|U_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

これが母平均値・母期待値の直観的意味. 要するに,

何回も宝くじを買って賞金の相加平均をとると, 必ず $E[\text{賞金}]$ に近い

確率にまつわるいろいろな「収束」

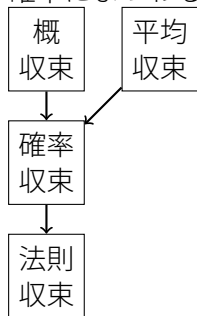
定理 (大数の強法則)

$$P(|\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \mu| > 0) = 0$$

「 U_n は μ に**概収束** する」(確率収束とは極限の位置が違う)

U_n の「近づく」(!) 先が μ でない確率はゼロである

確率にまつわる「収束」にはいろいろある…

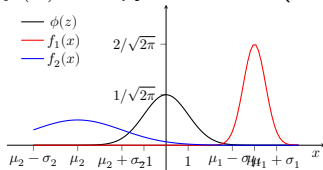


復習: 正規分布

久保川 統計学入門 §5.3.2

定義 ((一般の) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$) 久保川 統計学入門 §5.3.2母平均値 μ , 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は,

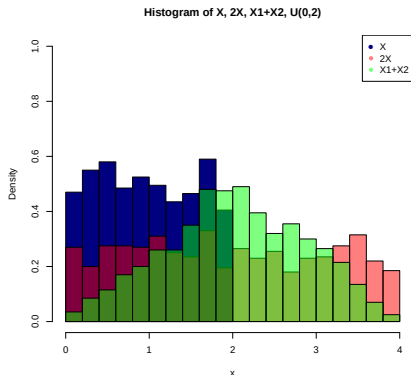
$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

 $f(x) = \text{scipy.stats.norm}(loc=\mu, scale=\sigma).pdf(x)$


対称軸は $x = \mu$, $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma}$, σ
 離れると 0.6 倍.

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1^2)$ 標準正規分布

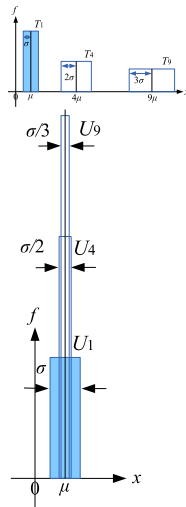
一様分布に従う確率変数の定数倍と和



$$X_1, X_2 \sim U(0, 2), \text{ i.i.d.}$$

$$2 \times X_1 \sim$$

$$X_1 + X_2 \sim$$



和の確率密度関数は、実際はどんな形なんだろう？

中心極限定理

久保川 統計学入門 §7.4

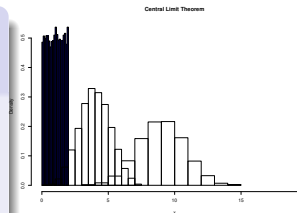
定理 (中心極限定理 (いいかげんバージョン))

久保川 統計学入門 公式 7.11

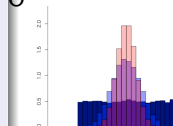
$X_1, \dots, X_n$: 独立同一分布にしたがう. $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. $n \rightarrow +\infty$ で,

- $S_n = X_1 + \dots + X_n$ の確率分布は,
正規分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$ に似る
- $U_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ の確率分布は,
正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に似る
- 標準化した $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ の確率分布は,
標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に似る

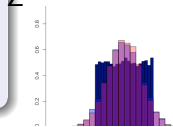
S



U



Z



ここまで来たよ

8 二項分布・独立同一分布の和

9 中心極限定理・独立同一分布の和の正規近似

- チェビシェフの不等式
- 大数の法則・中心極限定理
- 正規近似

独立同一分布にしたがう確率変数の和の正規近似 I

正規近似 久保川 統計学入門 p.162, 例題 7.14

L09-Q2

Quiz(独立同一分布と中心極限定理)

確率変数 X_i ($i = 1, \dots, 400$) は独立同一分布にしたがい, $E[X_i] = \frac{1}{10}$, $\text{Var}(X_i) = \frac{9}{100}$ である.

$S = X_1 + \dots + X_{400}$ とする.

S の分布を正規分布で近似し, $P(S > 31)$ の確率を, 標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表し, さらに `scipy.stats.norm.cdf()` (または正規分布表) を用いて小数値として近似的に求めよう.

L09-Q3

Quiz(独立同一分布と中心極限定理)

確率変数 X_i ($i = 1, \dots, 400$) は独立同一分布にしたがい, $X_i \sim U(3, 5)$ である. $S = X_1 + \dots + X_{400}$ とする.

S の分布を正規分布で近似し, $P(S \leq 1580)$ の確率を, 標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表し, さらに `scipy.stats.norm.cdf()` (または正規分布表) を用いて小数値として近似的に求めよう.

二項分布の正規近似 高校 数学 B I

久保川 統計学入門 基本問題問 1(p.166)

L09-Q4

Quiz(ベルヌーイ分布の独立同一分布の和と中心極限定理)

表が $\frac{4}{5}$, 裏が $\frac{1}{5}$ の確率で出る超いびつなコインを, 100 回投げる. 表が 73 回より多く 79 回以下で出る確率を求めたい.

標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表し, さらに `scipy.stats.norm.cdf()` (または正規分布表) を用いて小数値として近似的に求めよう.

二項分布の正規近似 高校 数学 B 久保川 統計学入門 公式 7.13

憶え方: 二項分布 $Bin(n, p)$ は, 正規分布 $N(np, np(1-p))$ で近似できる.