

区間推定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L11(2026-06-29 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-07 Tue 09:30 JST hig"

今日の目標

- 正規分布にしたがう母集団の母平均値を区間推定できる 久保川 統計学入門 §8.2
- 母比率を近似的に区間推定できる 久保川 統計学入門 §8.3
- カイ二乗分布を説明できる 久保川 統計学入門 §8.1



L10-Q1

TA Prob and Sol: 中心極限定理

X_i ($i = 1, \dots, n$) は独立で、同一の「ある分布」にしたがう。
 $U = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ について、 n が大きいとき、中心極限定理の結果として言えることをひとつ選ぼう。

- ① 「ある分布」が任意の分布のとき、 U は、近似的に、連続一様分布に従う
- ② 「ある分布」が一般の正規分布のとき、 U は、近似的に、標準正規分布に従う
- ③ 「ある分布」が一般の連続一様分布のとき、 U は、近似的に、標準連続一様分布に従う
- ④ 「ある分布」が標準連続一様分布のとき、 U は、近似的に、正規分布に従う

略解

「ある分布」が標準連続一様分布のとき、 U は、近似的に、正規分布に従う

- × 中心極限定理の結論は、「正規分布に近づく」
- × 中心極限定理の結論は、「正規分布に近づく」だが、標準正規分布に近づくようにするには、 $\mu = E[X_i], \sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ で標準化した $Z_n = \frac{U_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を考えないといけない.
- × 中心極限定理の結論は、「正規分布に近づく」
- 「ある分布」は任意の分布でよいので、特に標準連続一様分布でもよい

コメント

L10-Q2

TA Prob and Sol: 母平均値, 母分散, 母比率の点推定

フライドチキン屋さんのフライドチキンの大量の在庫 (=母集団) から, 無作為に 6 本のチキンを取り出したところ, 重さは次のようだった.

118g, 109g, 109g, 119g, 101g, 113g.

- ① 重さの母平均値を点推定しよう.
- ② 重さの二乗の母期待値を点推定しよう.
- ③ 重さの母分散を点推定しよう.
- ④ 105g 以上のものの母比率を点推定しよう.

略解

在庫のフライドチキンの重さを X とすると,

- ① 標本平均値 (の実現値) は $\bar{X} = \frac{1}{6}(118 + \dots + 113) = 111.5\text{g}$ なので、母平均値を 111.5g と推定する.
- ② 標本期待値 (の実現値) は $\overline{X^2} = \frac{1}{6}(118^2 \dots + 113^2) = 12469.5\text{g}^2$ なので、母期待値を 12469.5g^2 と推定する.
- ③ 不偏標本分散 (の実現値) は、
 $V^2 = \frac{1}{6-1}[(117 - 111.5)^2 + \dots + (112 - 111.5)^2] = 37.25\text{g}^2$ なので、母分散を 37.25g^2 と推定する.
- ④ 標本比率 (の実現値) は、 $\hat{p} = \frac{1}{6}[1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1] = 0.83$ なので、母比率を 0.83 と推定する.

emark 母ナント力と標本ナント力は異なる. 母平均値 = ..., 母平均値 $\mu = \dots$, $E[X] = \dots$ のように, 等号で結んではいけない.

L11-Q1

Quiz(標本抽出と推定)

標本抽出と推定について, 正しい文に○, 誤っている文に×をつけよう.

- ① 標本比率の分母は母集団のサイズである
- ② 母集団が異なっても, 標本が同じなら同じ標本平均値が得られる
- ③ 一般に, 母平均値は, 標本抽出のたびに異なる値になる
- ④ 標本平均値は, 母平均値を推定するための不偏な推定量である
- ⑤ 不偏標本分散を計算するには, 各データと母平均値との差を使う

ここまで来たよ

10 母集団・標本・標本抽出・推定・点推定

11 区間推定

- 区間推定・信頼区間
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散既知)
- 母比率の近似的区間推定・信頼区間
- カイ二乗分布—標準正規分布の不偏標本分散のしたがう分布

点推定 対 区間推定

点推定 久保川 統計学入門 §7.2 「1 個の推定値を求めること」
真の母平均値はわからないが、標本平均値を使って、

「母平均値を A 円と推定する」

それどのくらい正確なの？ 正確さは実は 母分散や標本サイズによる

区間推定 久保川 統計学入門 §8.2 「信頼係数に応じた信頼区間を求めること」

「母平均値が、 B 円以上 C 円以下である‘確率’は $1 - \alpha = 0.95$ 」

推定の精度・正確さまで表現

ここで‘確率’というのは不誠実. 正しい言葉遣いは、信頼係数=信頼度で

「母平均値の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は B 円以上 C 円以下」

動く (確率変数である) のは母平均値 μ でなく、 B, C のほう.

ここまで来たよ

10 母集団・標本・標本抽出・推定・点推定

11 区間推定

- 区間推定・信頼区間
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散既知)
- 母比率の近似的区間推定・信頼区間
- カイ二乗分布—標準正規分布の不偏標本分散のしたがう分布

標本平均値のしたがう分布 (正規母集団, 母分散既知)

久保川 統計学入門 §8.2

$N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団 (正規母集団) の, サイズ n の標本を何回も取り出して, 毎回, 標本平均値 $\bar{X}_n$ を計算する.

標本平均値 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ は確率変数

先週チーム課題で計算したのは (正規母集団じゃないけど), 1 標本で得られた標本平均値 (1 試行で得られた確率変数の実現値).

母集団が正規分布にしたがうなら, 標本平均値も正規分布にしたがう

$U_n = \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ (正規分布の再生性から)

$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1^2)$. (標準化)

正規分布の再生性

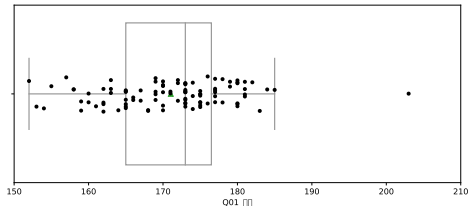
久保川 統計学入門 公式 6.21(p.144)

確率統計 I(2026)L9

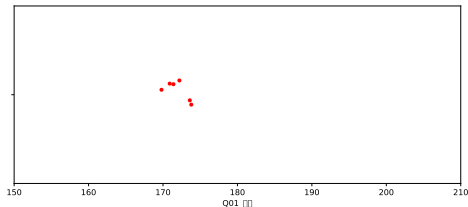
$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

身長の標本平均値の分布と母平均値

母集団



サイズ 10 の標本 6 個の標本平均値 (確率変数 $\bar{X} = \frac{1}{10}(X_1 + \dots + X_{10})$ の実現値)



命題 (母平均値 (正規母集団, 母分散既知) の信頼区間

久保川 統計学入門 公式 8.6(1)

$N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団 (μ 未知, σ^2 既知) の母平均値 μ を, サイズ n の標本から区間推定する. 母平均値 μ の **信頼係数** $1 - \alpha$ の **信頼区間** (**$(1 - \alpha)$ 信頼区間**) は, $\bar{X}_n$ を標本平均値として,

$$\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2/n}.$$

何回も標本抽出して何個も信頼区間を求めたとき, 信頼区間が μ を含む確率は, 信頼係数 $1 - \alpha$. 推定が外れる確率 α .

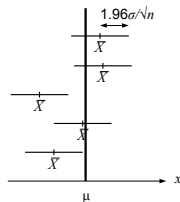
切りがいい α の z_{α} は $z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96, z_{\frac{0.01}{2}} = 2.58$.

久保川 統計学入門 公式 5.9(p.111)

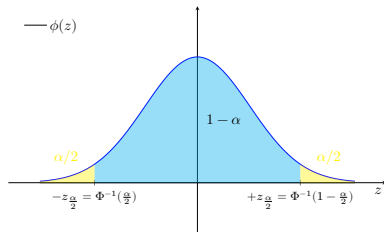
久保川 統計学入門 公式 5.9

ゆるふわな高校 数学 B では, $z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$ の場合のみ.

$a < \mu < b$ でなく, 閉区間の記号 $[a, b]$ で.



上側確率



定義 (標準正規分布の z_α 久保川 統計学入門 公式 5.9,(8.5), 図 8.4)

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき, **上側確率** $P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha/2$ となる境い目を $z_{\frac{\alpha}{2}}$ と定める.

Φ を累積分布関数, Φ^{-1} をその逆関数とすると,

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}). \text{ 偶関数だから } z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$

$$P(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha.$$

標本平均値と母平均値の差 $\bar{X}_n - \mu$ が 0 に近い確率は, 標準正規分布が真ん中で盛り上がっているために大きい (ここでは $1 - \alpha$) という式を書くと...

$$P\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} < \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\mu + \Phi^{-1}(\alpha/2) \times \sqrt{\sigma^2/n} < \bar{X}_n < \mu + \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 1 - \alpha.$$

μ について不等式を解くと,

$$P\left(\bar{X}_n - \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{X}_n - \Phi^{-1}(\alpha/2) \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{X}_n - (-z_{\frac{\alpha}{2}}) \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 1 - \alpha.$$

業界の習慣で, しばしば $\alpha = 0.05, 0.01$

$$\alpha = 0.05 \rightsquigarrow P\left(\bar{X}_n - 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{X}_n + 1.96 \times \sqrt{\sigma^2/n}\right) = 1 - 0.05.$$

L11-Q2

Quiz(正規分布にしたがう母集団の母平均値の区間推定 (母分散既知))

確率変数 X は, 母分散が $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 3^2$ とわかっており, 母平均値 $\mu = E[X]$ が不明な正規分布 $N(\mu, 3^2)$ にしたがう. X のサイズ 4 の標本を抽出したところ次のようになった (本当は整数値になる確率は 0 だけど, 計算を楽にするためのファンタジー).

51, 52, 47, 50.

- ① 母平均値 μ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
- ② 母平均値 μ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

久保川 統計学入門 基本問題 問 1(p.182), 発展問題問 9(p.183)

推定が正確であるとは 信頼区間が **自分の言葉で** であること.

Quiz(区間推定の性質)

標本からの母平均値の区間推定について, 正しいのはどれ?

- ① 母分散が大きいほど, 信頼区間は大きくなる
- ② 標本サイズが大きいほど, 信頼区間は大きくなる
- ③ 母平均値が大きいほど, 信頼区間は小さくなる
- ④ 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さくなる

標本平均値が大きい $\Rightarrow$ 信頼区間は **平行移動する**

母分散が大きい $\Rightarrow$ 信頼区間は **大きい**

標本サイズ n が小さい 信頼区間は **小さい**

ここまで来たよ

10 母集団・標本・標本抽出・推定・点推定

11 区間推定

- 区間推定・信頼区間
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散既知)
- 母比率の近似的区間推定・信頼区間
- カイ二乗分布—標準正規分布の不偏標本分散のしたがう分布

母比率の信頼区間

久保川 統計学入門 例題 8.11

母比率 p は、ベルヌーイ分布 $Ber(p)$ の母平均値 p . 母分散は $p(1-p)$. 母平均値 p を区間推定したい. 標本比率は標本平均値 $\bar{X}_n = \hat{p} = k/n$.

近似 1 サンプルサイズが大きいとき, 中心極限定理により, 標本比率は近似的に正規分布 $N(p, p(1-p)/n)$ に従う.

$$P\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} < p + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

近似 2' 母分散 $\sigma^2 = p(1-p)$ を, 標本比率で書いた $\hat{p}(1-\hat{p})$ で近似する

母比率の近似的信頼区間

久保川 統計学入門 例題 8.11

$X \sim Ber(p)$ のサイズ n の標本で, 標本比率 $\hat{p} = k/n$ のとき, 母比率の **信頼係数** $1 - \alpha$ の **信頼区間** ($(1 - \alpha)$ **信頼区間**) は,

$$\hat{p} - \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + \Phi^{-1}(\alpha/2) \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

L11-Q3

Quiz(母比率の区間推定)

選挙で出口調査をしたところ、50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた。母集団を投票した人 2500 人とする。そのうち A 候補に投票した人の母比率 (得票率) を考える。

- ① A 候補の得票率を、(点) 推定しよう
- ② A 候補の得票率を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう。
- ③ A 候補の得票率を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう。

久保川 統計学入門 基本問題問 7, 発展問題問 10(p.183)

注: 下限, 上限が 0,1 を越えるのは, 近似 1,2' が正確でないため. 実用的には 0,1 に直してしまっている。

ここまで来たよ

10 母集団・標本・標本抽出・推定・点推定

11 区間推定

- 区間推定・信頼区間
- 母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散既知)
- 母比率の近似的区間推定・信頼区間
- カイ二乗分布—標準正規分布の不偏標本分散のしたがう分布

カイ二乗分布

久保川 統計学入門 §8.1

定義 (カイ二乗分布)

久保川 統計学入門 定義 8.1(p.170)

$Z_1, \dots, Z_k, \text{i.i.d.} \sim N(0, 1^2)$ のとき, 確率変数 $W = Z_1^2 + \dots + Z_k^2$ は, 自由度 k のカイ二乗分布 χ_k^2 にしたがう.

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

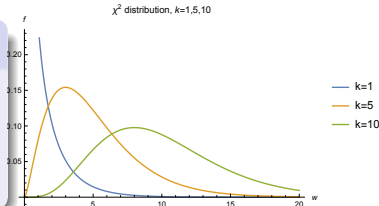
χ_k^2 の確率密度関数

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

久保川 統計学入門 公式 8.2

$W_k \sim \chi_k^2$ に対して,

$E[W_k] = E[Z_1^2 + \dots + Z_k^2] = k, \text{Var}(W_k) = 2k, E[(W_k)^\ell] = \text{簡単じゃない.}$



カイ二乗分布の確率密度関数と累積分布関数

```
1 | rvx2=stats.chi2(df=k) # k は自由度
```

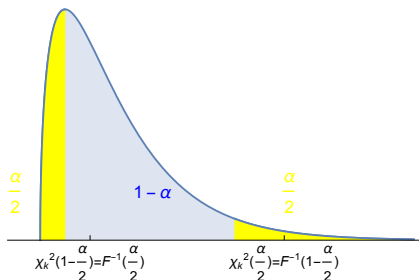
上側確率 $\alpha/2 = P(W > \chi_{k, \frac{\alpha}{2}}^2)$ となる境い目 $\chi_{k, \frac{\alpha}{2}}^2 = F_W^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

F はカイ二乗分布の累積分布関数.

久保川 統計学入門 数値表 p.292

久保川 統計学入門 数値表 p.290 と p.292 はフォーマットが違う

χ^2 distribution, $k=3$



$\chi_{k, \frac{\alpha}{2}}^2$ の定義

$$\alpha/2 = P(W > \chi_{k, \frac{\alpha}{2}}^2).$$

$$\chi_{k, \frac{\alpha}{2}}^2 = F_W^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}).$$

L11-Q4

Quiz(カイ二乗分布)

自由度 2 のカイ二乗分布 χ_2^2 にしたがう確率変数 W を考える．累積分布関数を $F_W(w)$ ，逆関数を $F_W^{-1}(p)$ とする．

次の量を $F_W()$, $F_W^{-1}()$ で表そう．

- ① $P(W < 0.1)$
- ② $P(W > 0.9)$
- ③ $P(W < w) = 0.1$ となる w
- ④ $P(W > w) = 0.1$ となる w

不偏標本分散のしたがう分布

久保川 統計学入門 §8.2.2

不偏標本分散のしたがう分布

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からサイズ n の標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$ を取り出すとき, 不偏標本分散

$$V^2 = \frac{1}{n-1} [(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2]$$

から定めた

$$W = (n-1) \times \frac{V^2}{\sigma^2}$$

は, 自由度 $k = n-1$ の カイ二乗分布 χ_{n-1}^2 にしたがう.

言い換え

比 $\frac{\text{不偏標本分散}}{\text{母分散}}$ は 1 に近いところに分布するが,
実は, この比は確率変数 $\frac{W}{n-1}$. ($W \sim \chi_{n-1}^2$)

実は W は標本平均値 $\bar{X}_n$ と独立

証明じゃないけど説明

$X_1, \dots, X_n, \text{i.i.d.} \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して,

$$\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$$

は自由度 n のカイ二乗分布 χ_n^2 にしたがる.

μ を $\bar{X}_n$ に替えた,

$$W = \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 χ_{n-1}^2 にしたがる.

$$W = (n-1) \times \frac{V^2}{\sigma^2}.$$