

母比率の片側検定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L14(2026-07-20 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-23 Thu 10:19 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側検定ができる 久保川 統計学入門 §9.5
- p 値を使った検定ができる 久保川 統計学入門 §9.3
- 第 1 種, 第 2 種の過誤, 有意水準と検出力を説明できる

久保川 統計学入門 §9.3



L13-Q1

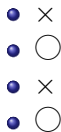
TA Prob and Sol: 母平均値の区間推定

信頼係数と母平均値の信頼区間について、次のうち正しいものの一つを選んで○をつけよう。

- 信頼区間が 1 つ出力されたとき、母平均値がその中に含まれる確率は信頼係数に等しい
- 同じのりで区間推定を繰り返すとき、母平均値を含む信頼区間が出力される確率は信頼係数に等しい
- 信頼係数が大きいほど、出力される信頼区間の長さは小さくなる
- 出力される信頼区間は、母平均値を中央に、信頼係数から決まる上下対称の長さで広がる区間である

略解

母比率と置き換えてもおなじこと。



L13-Q2

TA Prob and Sol: 正規でない母集団の母平均値の近似的信頼区間

あるドーナツ製造マシンが製造するドーナツの重さ Xg は, ある分布にしたがう確率変数である

製造された 40 個のドーナツの重さの標本平均値は $\bar{X} = 50g$. 不偏標本分散は $V^2 = 9g^2$ だった.

- ① 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}()$, z で書き, 小数に直そう.
- ② 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}()$, z で書き, 小数に直そう.

略解

①

$$50 - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{9}{40}} < \mu < 50 + \Phi^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{9}{40}}$$

$$\text{計算して } 50 - 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{40}} < \mu < 50 + 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{40}}.$$

すなわち, $49.070 < \mu < 50.930$.

②

同様に,

$$50 - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{9}{40}} < \mu < 50 + \Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{9}{40}}$$

$$50 - 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{40}} < \mu < 50 + 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{40}}.$$

すなわち, $48.776 < \mu < 51.224$,

L13-Q2

TA Prob and Sol: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg は、正規分布にしたがうことがわかっている。母平均値は $55g$ だと言われていたが疑っている。きょう 5 個製造したところ、下のような重さだった。
 $50g, 50g, 51g, 46g, 48g$.

ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg の母平均値が $55g$ と異なるかどうか、有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう。

略解

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で、正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う。
- ② 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $55g$ に等しい」すなわち「 $\mu = 55$ 」とする。対立仮説を「 $\mu \neq 55$ 」とする。

- ③ サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を V^2 とするとき, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{V^2/5}}$$

は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.

- ④ 検定統計量 T の実現値は,

$$t = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{V^2/5}} = \dots = \frac{49 - 55}{\sqrt{4/5}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$$

- ⑤ 棄却限界は $F^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) = t_{4, \frac{0.05}{2}} = \text{rvt.ppf}(1 - 0.05/2) = 2.776$

より, 棄却域は $|t| > 2.776$.

棄却域は, 「 $t < F^{-1}(\frac{0.05}{2})$ または $F^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) < t$ 」とも書ける.

- ⑥ $|-6.708| > 2.776$ であり, 実現値 t は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. (対立仮説「 $\mu \neq 155$ 」と結論する. を日本語で書いて) ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.

L13-Q3

TA Prob and Sol: 正規分布の母平均値に関する t 検定

あるコンビニには、ドーナツ販売開始前には、9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた。ドーナツ販売開始後の 4 日間、来店客数は次の通りだった。204, 208, 188, 200

来店者数は正規分布にしたがうと考える。ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか？ 有意水準 0.05 で考える。

略解

- ① 有意水準 0.05 で、正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う。
- ② 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の、来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」、すなわち $\mu = 196$ とする。対立仮説を $\mu \neq 196$ とする。

- ③ サイズ $n = 4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を V^2 とすると, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{V^2/4}}$$

は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $4 - 1$ の t 分布に従う.

- ④ この標本の検定統計量の実現値は, $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{V^2/n}} = \frac{200 - 196}{\sqrt{\frac{224}{3}/4}} = 0.92582$.
- ⑤ 棄却限界は $C = F^{-1}(0.975) = t_{3, \frac{0.05}{2}}$. 棄却域は $|t| > C$ すなわち, $|t| > 3.182$.
- ⑥ $|0.92582| < 3.182$ であり, 実現値は棄却域に含まれないので, 帰無仮説を受容する. (対立仮説「 $\mu \neq 196$ 」とは結論できない. を日本語で書いて) 来店客数の母平均値が変化したとは結論できない.
(注: 検定は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, 有意な標本でないなど).

来店客数は負にならないし、整数しかとらないから、正規分布にしたがうというのはおかしい前提だが、ここは練習ってことで、世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが、数理の人はおかしさを認識できるように。

母平均値・母分散・母比率・適合度・独立性の検定

	両側	片側
母平均値	両側 t 検定 久保川 統計学入門 公式 9.4	片側 t 検定 久保川 統計学入門 公式 9.4
母分散	両側カイ二乗検定 久保川 統計学入門 公式 9.7	片側カイ二乗検定 久保川 統計学入門 公式 9.7
母比率	両側二項検定 久保川 統計学入門 (9.7)	片側二項検定 久保川 統計学入門 例題 9.10
適合度	NA	片側カイ二乗検定 久保川 統計学入門 公式 11.2
独立性	NA	片側カイ二乗検定 久保川 統計学入門 公式 11.4
母平均値の差	両側 t 検定 対応なし (等分散, Welch) 久保川 統計学入門 公式 10.7, あり 久保川 統計学入門 公式 10.5	片側 t 検定 対応なし (等分散, Welch), あり
母分散の比	両側 F 検定 久保川 統計学入門 公式 10.3	片側 F 検定

一般の統計的仮説検定の、レポートや論文での書き方

母集団を決める. 母集団の分布タイプを仮定する. 使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

- ① 「有意水準 $\alpha = \dots$ で」「 $\dots$ 検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
- ② 「帰無仮説を $\dots$ とする」「対立仮説を $\dots$ とする」
- ③ 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は $\dots$ 分布にしたがう」
- ④ 「この標本に対してナントカ検定統計量 Y の実現値は $y = \dots$ である」
- ⑤ (棄却限界を計算して)「棄却域は $\dots$ 」
- ⑥ 「 $\dots$ より帰無仮説を棄却する/受容する」「よって (問に即した対立仮説の内容) と結論する/とは結論できない」

L14-Q1

Quiz(統計的仮説検定)

次のうち正しいものをすべて選ぼう.

- 帰無仮説が受容されたとき、対立仮説は成り立たないことが (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が受容されたとき、帰無仮説は (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が棄却されたとき、対立仮説が (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が棄却されたとき、帰無仮説が成り立たないことが (統計的に) 証明できたと言える

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

14 母比率の片側検定

- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列
- p 値=有意確率

母比率の検定 ratio I

p と書いてた母比率, ベルヌイ分布 $Ber(p)$, 二項分布 $Bin(n, p)$ の p を,
今日は r と書きます

例 (母比率の検定のアイデア 久保川 統計学入門 §9.1)

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率) $r = 1/5$ だと言われているが, もっと表がでちゃう気がする.

50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ, 表 $X = 15$ 回表が出た. こんな「稀な」ことが起きるってことは, そうに違いない!

⇨ これ, 統計的仮説検定として定式化できる考え方

前提 1 回投げたときの表 (1) 裏 (0) $X_i \sim Ber(r)$. (無限母集団はベルヌイ分布)

$Ber(r)$ のサイズ n のサンプルに対して合計 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ は

$X \sim Bin(n, r)$. (二項分布).

帰無仮説 $r = \frac{1}{5}$, 対立仮説 $r > \frac{1}{5}$.

母比率の検定 ratio II

帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで, $X = 15$ はとても稀 (矛盾) と言いたい. 確率統計 I(2026)L13

$$P(X = 15) = \frac{50!}{15!(50-15)!} \left(\frac{1}{5}\right)^{15} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-15} = 0.0299 \quad \text{稀じゃん}$$

ちょっと待て. 特定の回数が出ることにたい稀. 上の確率は
 $1/\text{場合の数} = 1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい $50 \cdot \frac{1}{5} = 10$ 回だって稀じゃん?

$$P(X = 10) = \frac{50!}{10!(50-10)!} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-10} = 0.1398$$

これ ($X = 15$) 以上に極端なことが起きる確率を考えよう.

$$P(15 \leq X \leq 50) = \sum_{k=15}^{50} P(X = k)$$

母比率の検定 ratio III

36 個も加えるの? …計算機で直接計算する手もある **正確確率検定**
 正規近似による計算 確率統計 I(2026)L09

$$E[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10, \text{Var}(X) = 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

サンプルサイズ 50 大と思うと, 中心極限定理より, 近似的に $X \sim N(10, 8)$. $Z = \frac{X-10}{\sqrt{8}} \sim N(0, 1^2)$.

$$P(15 \leq X) = P\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}} \leq Z < +\infty\right)$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right)$$

確率統計 I(2026)L06

$$= 1 - \text{cdf}\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - 0.96145 = 0.0385.$$

$P(X \geq 15) = 0.0385$ (これがあとで出てくる **p 値**) が稀と思うかは主観.
 けんかにならないように, 計算し始める前に基準を決めておく. それが, **f 有意水準** $\alpha = 0.05$ or 0.01 . そのときのぎりぎりの z が**棄却限界**, それより遠くが**棄却域**

母比率の検定 ratio IV

上で出てきた Z は, 分子分母を $n = 50$ で割ると, 帰無仮説 $r = r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率の実現値 $\hat{r} = \frac{15}{50}$ により,

$$\frac{15 - 10}{\sqrt{8}}v = \frac{\frac{15}{50} - \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})}{50}}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{\frac{r_0 \cdot (1-r_0)}{n}}}$$

という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.

ただし, 平方根の中は帰無仮説の母比率 $r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率は $\hat{r} = \frac{35}{50}$.

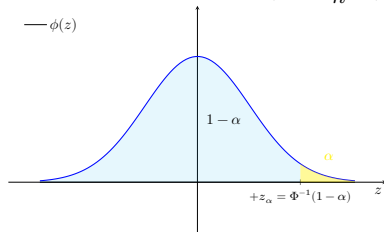
久保川 統計学入門 公式 9.9+式 (9.7)

復習

確率統計 I(2026)L10

母比率 r は、ベルヌーイ分布 $Ber(r)$ の母平均値 r . 母分散は $r(1-r)$.
 標本比率は標本平均値 $\bar{X}_n = \hat{r} = k/n$.

近似 1 サンプルサイズが大きいとき、中心極限定理により、標本比率は近似的に正規分布 $N(r, \frac{r(1-r)}{n})$ に従う.



定義 (標準正規分布の z_α) 久保川 統計学入門 公式 5.9,(8.5), 図 8.4 確率統計 I(2026)L10

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき、**上側確率** $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ となる点を z_α と定める。
 Φ を累積分布関数、 Φ^{-1} をその逆関数とすると、
 $P(+z_\alpha < Z < +\infty) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$, $z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

久保川 統計学入門 公式 9.9+式 (9.7)

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

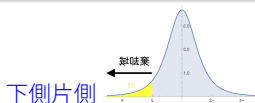
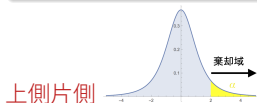
前提 $X_i \sim \text{Ber}(r)$.

- ① 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
- ② 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
- ③ 帰無仮説のもとで, サイズ n の標本の標本比率 $\hat{r} = \frac{1}{n} \sum_i X_i = \frac{k}{n}$ から計算

する検定統計量 $Z = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{\frac{r_0(1-r_0)}{n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたが

う (n 大のとき).

- ④ 標本に対して検定統計量 Z の実現値 z は...
- ⑤ 棄却限界は $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ (or $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$) 棄却域は $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ (or $z < \Phi^{-1}(\alpha)$).
- ⑥ 「(…) より帰無仮説を棄却する/受容する. よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない」



L14-Q2(上側片側)

TA Prob and Sol: 母比率の片側検定

あるスピードくじ(「あたり」と「はずれ」だけがある)は、あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている。しかし、実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている。

くじを 100 本ひいたところ、15 本があたりだった。

有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう。

略解

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で正規近似による母比率の上側片側検定(二項検定)を行う。
- ② 帰無仮説を母比率 $r = \frac{1}{10}$, 対立仮説を母比率 $r > \frac{1}{10}$ とする。

- ③ 帰無仮説のもとで, 100 本中のあたりの回数 $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{10})$. あたりの標本比率を $\hat{r}$ とすると, $Z = \frac{\hat{r} - \frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{10}(1-\frac{1}{10})}{100}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう.

- ④ この標本に対して $\hat{r} = \frac{15}{100}$ なので, 検定統計量の実現値 $z = \frac{5}{3} = 1.667$.
- ⑤ 棄却限界は $z_{0.05} = \Phi^{-1}(1 - 0.05) = \text{scipy.stats.norm(loc=0, scale=1).ppf}(1 - 0.05) = 1.645$. 棄却域は $z > z_{0.05}$
- ⑥ 実現値 z は棄却域に含まれる. 帰無仮説を棄却する. 母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

p 値による場合

5. p 値は $p = P(Z > \frac{5}{3}) = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{5}{3}) = 1 - \text{scipy.stats.norm(loc=0, scale=1).cdf}(\frac{5}{3}) = 0.0475$.

6. $0.0475 = p < \alpha = 0.05$ なので帰無仮説を棄却する. よって母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

棄却域に含まれない場合. p 値が α より大きい場合.

6. 帰無仮説を受容する. 母比率 $r > \frac{1}{10}$ とは結論できない.]

久保川 統計学入門 例題 9.11

L14-Q3 (下側片側)

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ(「あたり」と「はずれ」だけがある)は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより小さいのではないかと疑っている.

くじを 100 本ひいたところ, 5 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.01$ で母比率の検定を行おう.

久保川 統計学入門 問 1, 問 5(p.200)

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

14 母比率の片側検定

- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列
- p 値=有意確率

仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

仏 \ 人間	帰無仮説を棄却, 有意である	帰無仮説を受容, 有意でない
対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	確率 $1 - \beta$	第 2 種の過誤 確率 β
帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	第 1 種の過誤 確率 α	確率 $1 - \alpha$

α, β はどちらも小さくしたいが, 両立しない。

統計的仮説検定業界では, α はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or 0.05) に固定して, その上で β をなるべく小さくするように試みる習慣。

検定とは, 発色 (検出) したら (まれな誤検出を除いて) ほぼ確かなんだけど, 見逃すことはある異常検査薬のようなもの。

α : 誤検出率 = 有意水準 = 危険率. 偽陽性率 あわて者スコア

β : 見逃し率 (検出力: $1 - \beta$). 偽陰性率 ぼんやり者スコア

類似: 混同行列

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

14 母比率の片側検定

- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列
- p 値=有意確率

p 値=有意確率による棄却する/しない判定

久保川 統計学入門 §9.3

検定の Step6 では, 検定統計量の実現値 z, t が極端かどうか判定している
 $X = 15 \Leftrightarrow Z = \frac{15-10}{\sqrt{8}}$ が棄却域 (α で決まる) に入っているか?

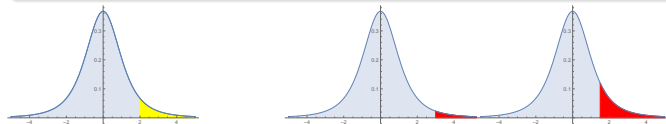
⇕

p 値=有意確率 $P(X \geq 15) = P(z \geq \frac{15-30}{\sqrt{8}})$ が有意水準 α より小さいか?

標本の p 値 (p-value)=有意確率

久保川 統計学入門 (9.3)(9.4)

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本より極端な値をとる確率
 $p < \alpha \Leftrightarrow$ 帰無仮説棄却



母比率の検定の上側片側検定するとき $p \text{ 値} = 1 - \Phi(z)$.

棄却域の考え方での棄却: $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. $\Phi(z)$ は増加関数だから...

p 値の考え方での棄却: $\Phi(z) > 1 - \alpha$ つまり $p = 1 - \Phi(z) < \alpha$ だから...

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似) in p 値

久保川 統計学入門 §8.2

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

前提 $X_i \sim \text{Ber}(r)$.

- ① 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
- ② 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
- ③ 帰無仮説のもとで, サイズ n の標本の標本比率 $\hat{r} = \frac{1}{n} \sum X_i = \frac{k}{n}$ から計算する検定統計量 $Z = \frac{X - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき).
- ④ 標本に対して検定統計量 Z の実現値 z は...
- ⑤ 棄却限界は $\Phi^{-1}(1-\alpha)$. 棄却域は $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$ (or $z < \Phi^{-1}(\alpha)$). 実現値 z の p 値は $p = \Phi(\infty) - \Phi(z)$. (or $p = \Phi(z) - \Phi(-\infty)$)
- ⑥ 「 $p < \alpha$ より帰無仮説を棄却する (受容する). よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない」

ふつうじゃない trialL13(締切 2026-07-27 月 20:00) Moodle テスト. L13 参照.
ふつうじゃない trialL15(締切 2026-08-03 月 20:00)

- trialL15-1 LearnMoodle 練習問題的なものだが、受験は2回まで。チェックは使えない
 - ▶ ほぼ同内容の予行演習用の練習問題 L15 に合格すると開放されます。
 - ▶ 趣旨: 対面でやる機会がない
- trialL15-2 LearnMoodle 作文
 - ▶ まずアンケートにご協力お願いします。回答すると開放されます。
 - ▶ 学習履歴分析への同意をお願いします

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途:LearnMoodle 成績評価方法参照。

2026-08-04 月 09:15-10:15, 参照なし。教室は**ふつうじゃない3-107**。事前の出欠連絡不要。
理由を問わず、欠席したときの追試や配慮はなし。trial L01-08 の出題計画をあわせたもの
(2025 年度と内容は異なる)。要学生証, 個人別座席指定。

お奨めの準備方法 trialL01-L08 の LearnMoodle 再練習問題 (成績に無関係) で満点をとれるように。

すべて持込不可。

災害や交通機関などにより全学的に定期試験が中止・延期になるときは同様に中止・延期。

成績評価

考慮対象になるかもしれないものは LearnMoodle 欠席届に 2026-07-29 水までに提出。

メッセージ

- 教科書は売らないで。多変量解析☆演習 (2年後期), 確率モデル☆演習, 確率統計 II,III (3年後期) 他で使います。
- 多変量解析☆演習 (2年後期) でお会いしましょう。