

ベイズ推定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L15(2026-07-27 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-28 Tue 07:59 JST hig"

今日の目標

- p 値を使った検定ができる 久保川 統計学入門 §9.3
- 第 1 種, 第 2 種の過誤, 有意水準と検出力を説明できる 久保川 統計学入門 §9.3
- ベイズ推定できる 久保川 統計学入門 §3.4



L14-Q1

TA Prob and Sol: 統計的仮説検定

次のうち正しいものをすべて選ぼう。

- 帰無仮説が受容されたとき、対立仮説は成り立たないことが (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が受容されたとき、帰無仮説は (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が棄却されたとき、対立仮説が (統計的に) 証明できたと言える
- 帰無仮説が棄却されたとき、帰無仮説が成り立たないことが (統計的に) 証明できたと言える

略解

- × 受容された (棄却できなかった) 時は何も言えない. 実験失敗.

- × 受容された（棄却できなかった）時は何も言えない．実験失敗．
- 帰無仮説が成り立たないなら，対立仮説が成立する．
- 帰無仮説が棄却されたとき、帰無仮説が成り立たないことが (統計的に) 証明できたと言える．統計的には，有意水準 α だけの間違いの可能性はあるけど，ということ．

L14-Q2(上側片側)

TA Prob and Sol: 母比率の片側検定

あるスピードくじ(「あたり」と「はずれ」だけがある)は，あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている．しかし，実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている．

くじを 100 本ひいたところ，15 本があたりだった．
有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう．

略解

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で正規近似による母比率の上側片側検定（二項検定）を行う.
- ② 帰無仮説を母比率 $r = \frac{1}{10}$, 対立仮説を母比率 $r > \frac{1}{10}$ とする.
- ③ 帰無仮説のもとで, 100 本中のあたりの回数 $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{10})$. あた

りの標本比率を $\hat{r}$ とすると, $Z = \frac{\hat{r} - \frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})}{100}}}$ は近似的に標準正規分

布 $N(0, 1^2)$ にしたがう.

- ④ この標本に対して $\hat{r} = \frac{15}{100}$ なので, 検定統計量の実現値 $z = \frac{5}{3} = 1.667$.
- ⑤ 棄却限界は $z_{0.05} = \Phi^{-1}(1 - 0.05) = \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).ppf(1 - 0.05) = 1.645$. 棄却域は $z > z_{0.05}$
- ⑥ 実現値 z は棄却域に含まれる. 帰無仮説を棄却する. 母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

p 値による場合

5. p 値は $p = P(Z > \frac{5}{3}) = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{5}{3}) = 1 - \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).cdf(\frac{5}{3}) = 0.0475$.
6. $0.0475 = p < \alpha = 0.05$ なので帰無仮説を棄却する. よって母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

棄却域に含まれない場合. p 値が α より大きい場合.

6. 帰無仮説を受容する. 母比率 $r > \frac{1}{10}$ とは結論できない.

久保川 統計学入門 例題 9.11

L14-Q3 (下側片側)

Quiz 解答: 母比率の片側検定

- ① 有意水準 $\alpha = 0.01$ で正規近似による母比率の下側片側検定 (二項検定) を行う.
- ② 帰無仮説を母比率 $r = \frac{1}{10}$, 対立仮説を母比率 $r < \frac{1}{10}$ とする.

- ③ 帰無仮説のもとで, 100 本中のあたりの回数 $T \sim B(\frac{1}{10}, 100)$. あたりの標本比率を $\hat{r}$ とすると, $Z = \frac{\hat{r} - \frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})}{100}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう.
- ④ この標本に対して $\hat{r} = \frac{5}{100}$ なので, 検定統計量の実現値は $z = -\frac{5}{3} = -1.667$.
- ⑤ 棄却限界は $-z_{0.01} = \Phi^{-1}(0.01) = \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).ppf(0.01) = -2.326$. 棄却域は $z < -z_{0.01}$.
- ⑥ 検定統計量の実現値 z は棄却域に含まれない. 帰無仮説を受容する. 母比率 $r < \frac{1}{10}$ と結論できない.

p 値による場合

5. p 値は $p = P(Z < -\frac{5}{3}) = \Phi(-\frac{5}{3}) - \Phi(-\infty) = \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).cdf(-\frac{5}{3}) = 0.0475$.

6. $0.0475 = p > \alpha = 0.01$ なので帰無仮説を受容する. よって母比率 $r < \frac{1}{10}$ と結論できない.

棄却域に含まれる場合. p 値が α より小さい場合.

6. 帰無仮説を棄却する. 母比率 $r < \frac{1}{10}$ と結論する.

ここまで来たよ

14 母比率の片側検定

15 ベイズ推定

- p 値=有意確率
- 条件付き確率
- ベイズの定理とベイズ推定

仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

仏 \ 人間	帰無仮説を棄却, 有意である	帰無仮説を受容, 有意でない
対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	確率 $1 - \beta$	第 2 種の過誤 確率 β
帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	第 1 種の過誤 確率 α	確率 $1 - \alpha$

α , β はどちらも小さくしたいが, 両立しない。

統計的仮説検定業界では, α はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or 0.05) に固定して, その上で β をなるべく小さくするように試みる習慣。

検定とは, 発色 (検出) したら (まれな誤検出を除いて) ほぼ確かなんだけど, 見逃すことはある異常検査薬のようなもの。

α : 誤検出率=有意水準=危険率. 偽陽性率 あわて者スコア

β : 見逃し率 (検出力: $1 - \beta$). 偽陰性率 ぼんやり者スコア

類似: 混同行列

L15-Q1

Quiz(統計的仮説検定での棄却の確率)

未知の母平均値 μ と母分散 σ^2 の正規分布にしたがう母集団について、帰無仮説を（実際には正しくない） $\mu = \mu_0$ として、母平均値の t 検定を行う。次のうち正しいものの番号を 1 つだけ答えよう。

- ① 有意水準 α を大きく設定するほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ② 標本サイズ n を小さく設定するほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ③ $|\mu - \mu_0|$ が大きいほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ④ 真の母分散 σ^2 が小さいほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる

p 値=有意確率による棄却する/しない判定

久保川 統計学入門 §9.3

検定の Step6 では, 検定統計量の実現値 z, t が極端かどうか判定している
 $X = 15 \Leftrightarrow Z = \frac{15-10}{\sqrt{8}}$ が棄却域 (α で決まる) に入っているか?

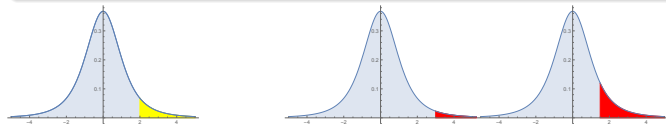
⇕

p 値=有意確率 $P(X \geq 15) = P(z \geq \frac{15-30}{\sqrt{8}})$ が有意水準 α より小さいか?

標本の p 値 (p-value)=有意確率

久保川 統計学入門 (9.3)(9.4)

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本より極端な値をとる確率
 $p < \alpha \Leftrightarrow$ 帰無仮説棄却



母比率の検定の上側片側検定するとき $p \text{ 値} = 1 - \Phi(z)$.

棄却域の考え方での棄却: $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. $\Phi(z)$ は増加関数だから...

p 値の考え方での棄却: $\Phi(z) > 1 - \alpha$ つまり $p = 1 - \Phi(z) < \alpha$ だから...

ここまで来たよ

14 母比率の片側検定

15 ベイズ推定

- p 値=有意確率
- 条件付き確率
- ベイズの定理とベイズ推定

復習：同時分布と周辺分布

久保川 統計学入門 §6.1

確率統計 I(2025)L06

X, Y 確率変数

同時分布

$$p(x, y) = P(X = x \text{ かつ } Y = y) =$$

$y \backslash x$	150	160	165	計
45	3/8	0	1/12	
50	1/8	1/3	1/12	
計				

周辺分布

X, Y の周辺分布 $p_X(x), p_Y(y)$ は,

$$\text{離散型} p_X(x) = p(x, \bullet) = \sum_y p(x, y), \quad p_Y(y) = p(\bullet, y) = \sum_x p(x, y)$$

要するに 一方を無視した分布. 小計.

条件付き確率

久保川 統計学入門 §3.3

定義 (条件付き確率 久保川 統計学入門 定義 3.7, 公式 3.8)

条件 (事象) A のもとでの, 事象 B の条件付き確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

縦棒「 $|$ =given」の前後は不平等: P (確率を考える事象|条件の事象)
 $P(B|A) \neq P(A|B), \neq P(A \cup B)$.

意味 A が起きる場合に限定した, B が起きる確率

$P(B|A)$ を $P(\text{of})B$ given A と発音する人がいる. given 条件=条件が与えられたとき, という言い方から.

縦棒の前だけ見る (縦棒の後を固定する) と, ただの確率. 全事象は 1.

離散型確率変数に対する条件付き確率

久保川 統計学入門 §6.3

同時確率分布

$$p(x, y) = P(X = x \text{ かつ } Y = y) =$$

$y \backslash x$	150	160	165
45	3/8	0	1/12
50	1/8	1/3	1/12

定義 (離散型確率変数に対する条件付き確率)

条件 (事象) $Y = y$ のもとでの, 事象 $X = x$ の条件付き確率の記号

$P(X = x | Y = y) = p_{X|Y}(x \text{ の値} | y \text{ の値})$

例 $p_{X|Y}(150|45), p_{Y|X}(45|150)$. 縦棒の前だけ見る (縦棒の後ろを固定する) と, 前の変数についての, ただの確率分布. 意味 **自分の言葉でどうぞ**

命題 (条件付き確率を同時確率分布と周辺分布で表す式 久保川 統計学入門 定義 6.9)

$$P(X = x | Y = y) = p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},$$

$$P(Y = y | X = x) = p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}.$$

L15-Q2

Quiz(条件付き分布)

次の 6 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを引く.

♥7 ♥8 ♥9 ♦8 ♠9 ♣9

$X = \text{数}$, $Y = 0$ (赤札), 1 (黒札) とすると同時分布は次のようになる.

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

- ① 9 の札が出る条件のもとで赤札が出る, 条件付き確率を求めよう.
- ② 赤札が出る条件のもとで 9 の札が出る, 条件付き確率を求めよう.

条件付き確率と周辺分布から、同時確率分布、周辺分布

命題 (同時確率分布, 周辺分布, 条件付き確率の関係)

乗法公式 (同時確率分布との関係)

久保川 統計学入門 公式 3.8

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_{X|Y}(x|y) \times p_Y(y) \\ &= p_{Y|X}(y|x) \times p_X(x). \end{aligned}$$

全確率の法則 (周辺分布との関係)

久保川 統計学入門 §3.4

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_y p_{X|Y}(x|y) \times p_Y(y), \\ p_Y(y) &= \sum_x p_{Y|X}(y|x) \times p_X(x) \end{aligned}$$

ここまで来たよ

14 母比率の片側検定

15 ベイズ推定

- p 値＝有意確率
- 条件付き確率
- ベイズの定理とベイズ推定

ベイズの定理 久保川 統計学入門 §3.4

定理 (ベイズの定理 久保川 統計学入門 公式 3.15)

$$p_{X|Y}(x|y) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{\sum_{x'} p_{Y|X}(y|x')p_X(x')},$$

$$p_{Y|X}(y|x) \stackrel{\text{定義}}{=} \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)}{\sum_{y'} p_{X|Y}(x|y')p_Y(y')}.$$

$p_{X|Y}(x|y)$ を $p_{Y|X}(y|x')$ (と $p_X(x')$) で書き表す式,

$p_{Y|X}(y|x)$ を $p_{X|Y}(x|y')$ (と $p_Y(y')$) で書き表す式.

定義の分子分母を, 乗法公式と全確率の公式で書き直しただけ (なので余分の記憶は不要).

L15-Q3

Quiz(同時分布・条件付き分布・周辺分布)

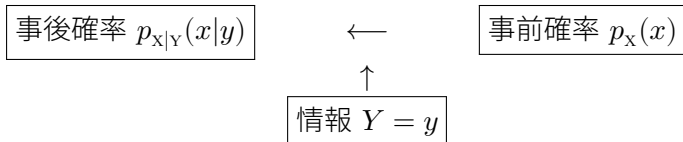
離散型確率変数 X は値 2, 3, Y は値 20, 30 をとる. 次の通りとする.

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (y = 20) \\ \frac{2}{3} & (y = 30) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$p_{X|Y}(x|20) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 2) \\ \frac{1}{4} & (x = 3) \end{cases}, \quad p_{X|Y}(x|30) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 2) \\ \frac{1}{2} & (x = 3) \end{cases}.$$

- ① 同時分布を求めよう
- ② X の周辺分布を求めよう.
- ③ 条件付き確率 $p_{Y|X}(20|2), p_{Y|X}(30|3)$ を求めよう.

ベイズ推定



追加の情報が得られるたびに、事後確率は正確になっていく。

主観確率 事前確率に主観を許す考え方. 事後確率にも主観が含まれる.

例えばこんな問 I

L15-Q4

Quiz(ベイズの推定)

甘い品種 1 と渋い品種 2 の柿が袋に入っている.

甘い品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.

渋い品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.

- ① 袋の柿の $1/5$ が甘い品種 1 である. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. 取り出した赤い柿が甘い品種 1 である確率を求めよう.
- ② 袋から取り出すの柿の $1/5$ が渋い品種 2 であると考えている. いま, 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. この柿が渋い確率を求めよう.

L15-Q5

Quiz(ベイズ推定)

ある病気の人割合は全体の 0.005 と思われる。

検査では、病気の人 0.99 は陽性となり (真陽性), 0.01 の人は陰性になる (偽陰性). また、病気でない人 0.02 は (誤って) 陽性となり (偽陽性), 0.98 の人は陰性になる (真陰性).

- ① 1 回の検査で陽性となった人が、病気である確率を求めよう.
- ② 1 回の検査で陽性となった人が、さらにもう 1 回検査してやはり陽性だった. その人が病気である確率を求めよう.

ふつうじゃない trialL13(締切 2026-07-27 月 20:00) Moodle テスト. L13 参照.
ふつうじゃない trialL15(締切 2026-08-03 月 20:00)

- trialL15-1 LearnMoodle 練習問題的なものだが、受験は2回まで。チェックは使えない
 - ▶ ほぼ同内容の予行演習用の練習問題 L15 に合格すると開放されます。
 - ▶ 趣旨: 対面でやる機会がない
- trialL15-2 LearnMoodle 作文
 - ▶ まずアンケートにご協力お願いします。回答すると開放されます。
 - ▶ 学習履歴分析への同意をお願いします

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途: LearnMoodle 成績評価方法参照。

2026-08-04 月 09:15-10:15, 参照なし。教室は**ふつうじゃない 3-107**。事前の出欠連絡不要。
理由を問わず、欠席したときの追試や配慮はなし。trial L01-08 の出題計画をあわせたもの
(2025 年度と内容は異なる)。要学生証, 個人別座席指定。

お奨めの準備方法 trialL01-L08 の LearnMoodle 再練習問題 (成績に無関係) で満点をとれるように。

すべて持込不可。

災害や交通機関などにより全学的に定期試験が中止・延期になるときは同様に中止・延期。

成績評価

考慮対象になるかもしれないものは LearnMoodle 欠席届に 2026-07-29 水までに提出。

メッセージ

- 教科書は売らないで。確率統計 II,III (3 年後期) 他で使います。
- 多変量解析☆演習 (2 年後期) でお会いしましょう。