

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L15(2026-07-28 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-28 Tue 07:56 JST hig"

今日の目標



L14-Q1

TA Prob and Sol: 統計的仮説検定での棄却の確率

未知の母平均値 μ と母分散 σ^2 の正規分布にしたがう母集団について、帰無仮説を（実際には正しくない） $\mu = \mu_0$ として、母平均値の t 検定を行う。次のうち正しいものの番号を 1 つだけ答えよう。

- ① 有意水準 α を大きく設定するほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ② 標本サイズ n を小さく設定するほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ③ $|\mu - \mu_0|$ が大きいほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる
- ④ 真の母分散 σ^2 が小さいほど、帰無仮説が棄却される確率は小さくなる

略解

- × 棄却域が広くなるので、また、第1種の過誤のリスクを許容するので.
- t 検定統計量の分子が小さくなるので、また、推測が不正確になるので.
- × 標本平均値の真の分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ と帰無仮説に基づく標本平均値の分布 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ との重なりが小さくなるので. 大ボケの帰無仮説ほど否定しやすいので.
- × t 検定統計量の分母が小さくなりがちなので、また、標本平均値のちらばりが小さくなり、標本平均値の真の分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ と帰無仮説に基づく標本平均値の分布 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ との重なりが小さくなるので.

L14-Q2

TA Prob and Sol: 条件付き分布

次の 6 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを引く.

♥7 ♥8 ♥9 ♦8 ♠9 ♣9

$X = \text{数}, Y = 0(\text{赤札}), 1(\text{黒札})$ とすると同時分布は次のようになる.

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

- ① 9 の札が出る条件のもとで赤札が出る, 条件付き確率を求めよう.
- ② 赤札が出る条件のもとで 9 の札が出る, 条件付き確率を求めよう.

略解

$$\textcircled{1} \quad p_{Y|X}(0|9) = \frac{p(9,0)}{p_X(9)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{2} \quad p_{X|Y}(9|0) = \frac{p(9,0)}{p_Y(0)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

L14-Q3

TA Prob and Sol: 同時分布・条件付き分布・周辺分布

離散型確率変数 X は値 2, 3, Y は値 20, 30 をとる. 次の通りとする.

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (y = 20) \\ \frac{2}{3} & (y = 30) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$p_{X|Y}(x|20) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 2) \\ \frac{1}{4} & (x = 3) \end{cases}, \quad p_{X|Y}(x|30) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 2) \\ \frac{1}{2} & (x = 3) \end{cases}.$$

- ① 同時分布を求めよう
- ② X の周辺分布を求めよう.
- ③ 条件付き確率 $p_{Y|X}(20|2), p_{Y|X}(30|3)$ を求めよう.

略解

$y \backslash x$	2	3	
20	3/12	1/12	4/12
30	4/12	4/12	8/12
	7/12	5/12	1

L14-Q4

TA Prob and Sol: ベイズの推定

甘い品種 1 と渋い品種 2 の柿が袋に入っている。

甘い品種 1 は、確率 0.95 で赤に、確率 0.05 で黄色になる。

渋い品種 2 は、確率 0.125 で赤に、確率 0.875 で黄色になる。

- ① 袋の柿の $1/5$ が甘い品種 1 である。いま、無作為に 1 個の柿を取りだしたところ、赤い柿だった。取り出した赤い柿が甘い品種 1 である確率を求めよう。
- ② 袋から取り出すの柿の $1/5$ が渋い品種 2 であると考えている。いま、1 個の柿を取りだしたところ、黄色い柿だった。この柿が渋い確率を求めよう。

略解

甘い品種 1: $x = 1$, 渋い品種 2: $x = 2$, 赤: $y = 10$, 黄: $y = 20$ と表現する。

1

$$p_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} 0.95 & (y = 10) \\ 0.05 & (y = 20) \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} 0.125 & (y = 10) \\ 0.875 & (y = 20) \end{cases}$$

$y \backslash x$	1	2
10	0.19	0.10
20	0.01	0.70

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(1|10) &= \frac{p_{Y|X}(10|1)p_X(1)}{\sum_x p_{Y|X}(10|x)p_X(x)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.2}{0.95 \times 0.2 + 0.125 \times 0.8} = \frac{19}{29}. \end{aligned}$$

L14-Q5

TA Prob and Sol: ベイズ推定

ある病気の人割合は全体の 0.005 と思われる。
 検査では、病気の人 0.99 は陽性となり (真陽性), 0.01 の人は陰性になる (偽陰性)。また、病気でない人 0.02 は (誤って) 陽性となり (偽陽性), 0.98 の人は陰性になる (真陰性)。

- ① 1 回の検査で陽性となった人が、病気である確率を求めよう。
- ② 1 回の検査で陽性となった人が、さらにもう 1 回検査してやはり陽性だった。その人が病気である確率を求めよう。

略解

検査 $Y = \begin{cases} 80 & (\text{陽性}) \\ 20 & (\text{陰性}) \end{cases}$, 病状 $X = \begin{cases} 100 & (\text{病気}) \\ 0 & (\text{病気でない}) \end{cases}$ で表す。

①

$$p_X(100) = 0.005, p_{Y|X}(80|100) = 0.99, p_{Y|X}(80|0) = 0.02$$

同時確率分布

$x \backslash y$	80	20	計
100	真陽性 0.99×0.005	偽陰性 0.01×0.005	0.005
0	偽陽性 0.02×0.995	真陰性 0.98×0.995	0.995

$$\begin{aligned}
 p_{X|Y}(100|80) &= \frac{p_{Y|X}(80|100) \times p_X(100)}{p_{Y|X}(80|100) \times p_X(100) + p_{Y|X}(80|0) \times p_X(0)} \\
 &= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.02 \times 0.995} = 0.199185.
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad 0.99^2 \cdot 0.005 / (0.99^2 \cdot 0.005 + 0.02^2 \cdot 0.995) = 0.924884.$$