

放物運動・板との衝突

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

プロジェクト演習 L03(2021-04-27 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2021-05-08 Sat 11:48 JST hig"

今日の目標

- 放物運動で, 初期条件 (時刻 $t = 0$ の位置速度) \leftrightarrow 時刻 t の位置速度を相互に求められる
- 板への衝突前後の運動の変化を, 反発係数で記述できる

ここまで来たよ

- 3 ピンポン球の運動
 - ピンポン球の位置速度
 - 床への衝突と反発係数

物理未習者向け予習

- NHK 高校講座 物理基礎 1 学期 6 回 (落下運動), 7 回 (放物運動) とそれ以前

<https://www.nhk.or.jp/kokokoza/tv/butsurikiso/>



- ▶ 付属・指定校・公募推薦入学者が入学前にやった教材

ピンポンチャレンジを数学的に言うと?

どうせピンポン球は鉛直面内を運動するから、平面で考えられる。
水平に x 軸, 鉛直 (重力に平行) に z 軸.

$$\text{位置 } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

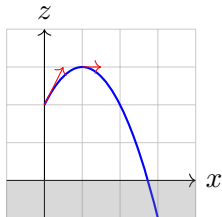
↓ 微分 ↑ 積分

$$\text{速度 } \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

微積分

速さ $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \text{速度ベクトルの } \mathbf{v}(t) \text{ の絶対値 (長さ)}$

線形代数



アニメーション

<https://www.geogebra.org/m/axszjbeg>

黒字 x スカラー, 青太字 \mathbf{r} 2次元ベクトル.

ピンポンチャレンジで必要なこと

順問題 時刻 $t = 0$ に、ある初期条件

初期位置 $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$, 初速度 $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix}$

で出発したピンポン球は、時刻 t にはどの位置 $\mathbf{r}(t)$, どの速度 $\mathbf{v}(t)$?

逆問題 ピンポン球が、ある時刻 t に $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\text{カップ}}$ となるためには、どんな初期条件 $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ にすればいい?

発射装置作りの目的は、**自分の言葉でどうぞ**

「ピンポンチャレンジで必要なこと」への答

$x(t), z(t)$ は別々に考えていい.

$x(t)$

x は t の 1 次関数

- 係数 2 個 (a, b) は初期条件から決まる.
 $x(t) = at + b, v_x(t) = a.$
- 「力を受けていない」

物理と微分方程式

$z(t)$

z は t の 2 次関数

- 2 次の係数は $-\frac{1}{2}g$ 固定. **重力加速度** の大きさ $g = 9.80\text{m/s}^2$, 係数 2 個 (c, d) は初期条件から決まる.
 $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d, v_z(t) = -gt + c.$
- 「鉛直下向き重力 $-mg$ 」

物理と微分方程式

$x(t), z(t)$ から t 消去 \rightarrow 軌跡は xz -平面の上に凸な放物線

例題 I

L03-Q1

Quiz(放物運動)

この記号で、時刻 $t = 0$ のピンポン球の位置は $\begin{pmatrix} 0 \\ 2.94 \end{pmatrix}$ [m], 速度は $\begin{pmatrix} 4.00 \\ 0 \end{pmatrix}$ [m/s] だった.

- ① 時刻 t [s] でのピンポン球の位置と速度を求めよう.
- ② $z(t_1) = 0$ を満たす時刻 $t = t_1$ を求めよう. そのときの位置と速度を求めよう.

成分で言うか、大きさと角度で言うか

「速さ v_0 で、水平方向から上向き角度 θ_0 で打ち出した」

極座標 (微積分 II)

$$v_x(0) = v_0 \cos \theta_0$$

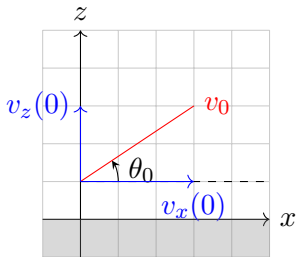
$$v_z(0) = v_0 \sin \theta_0$$

⇔ 逆に解いて、

逆三角関数 (微積分 I)

$$v_0 = (v_x(0)^2 + v_z(0)^2)^{1/2}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{v_z(0)}{v_x(0)}$$



例題

逆/三角関数の数値計算

L03-Q2

Quiz(速度を極座標で)

$v_x(0) = 2 \text{ m/s}$, $v_z(0) = -1 \text{ m/s}$ のとき, v_0, θ_0 を求めよう.

問題 on <https://moodle.hig3.net>

$\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

- 電卓アプリ on Windows 10 (電卓で <https://ja.wolframalpha.com> 検索, 関数電卓, deg:度, rad:ラジアン, 2nd:逆三角関数)
- 電卓アプリ on Mac
- 電卓アプリ on iPhone
- Excel $\tan^{-1} a = \text{atan}(a)$, $\pi = \text{pi}()$



大きさと角度 + 上品な言い方の問題

L03-Q3

TA Prob and Sol: 放物運動

ピンポン球を床の上 h m の位置から、速さ v_0 m/s で、(上向きを正として測った) 角 θ_0 の向きに発射した。

床に落ちた瞬間の、ピンポン球の位置、速度、速さ、速度と床のなす角 (> 0) は?

略解

発射時刻を $t = 0$ とする

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t + h \end{pmatrix}.$$

床に到達した時刻を $t = t_1$ とすると、2次方程式 $z(t_1) = 0$ を解いて、

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} + \left[\left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2 + \frac{2h}{g} \right]^{1/2}.$$

ここまで来たよ

- 3 ピンポン球の運動
 - ピンポン球の位置速度
 - 床への衝突と反発係数

床 ($z = 0, x$ 軸に平行) に衝突するとき, または, x 軸に平行なターンプラケットに衝突するとき,
衝突時刻 $t = t_1$ で,

- $r(t)$ は連続
- $v(t)$ は不連続 (でもいい)

衝突直前 v_1, v_{1z}, θ_1 , 衝突直後 $\bar{v}_1, \bar{v}_{1z}, \bar{\theta}_1$
板と球のタイプによる…けど硬い机とピンポン球の場合,

衝突前後の速度

$$\bar{v}_{1z} = -e \times v_{1z}$$

$$\bar{v}_{1x} = +1 \times v_{1x}$$

反発係数 $0 \leq e \leq 1$

e は机とピンポン球で決まる (位置や速度によらない). 知る方法



例題

L03-Q4

Quiz(反発係数)

水平な (x 軸と平行な) 床に, ピンポン球が速度 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ で衝突した.

反発係数 $e = 0.25$ のとき, 衝突直後の速度 $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ の成分, 速さ, 床とのなす角を求めよう

問題 <https://moodle.hig3.net>

問

L03-Q5

Quiz(反発係数)

高さ h で静かに手をはなしたピンポン球が、真下に落ちて床に衝突した後、高さ \bar{h} まであがった。反発係数 e を求めよう。