単振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L01(2012-09-25 Tue)

今日の目標

1. ばねの運動方程式と初期条件を (再び) 書けるようになろう.
2. 単振動の運動方程式を (再び) 解けるようになろう.
3. 初期条件のもとで単振動のグラフを描けるようになろう

http://hig3.net

この授業ののり

成績計算コアでもないのに注文の多い科目です…科目の成績 100 ピーナッツは

- 10 ピーナッツ:毎回授業での quiz
- 10 ピーナッツ:授業時間外の予習復習 (授業後に e ラーニングサイト ReLS で表示される問題に解答．水曜昼から月曜夜まで解答可能)
- 30 ピーナッツ:プチテスト いまのところ 2011-11-15 を予定
- 50 ピーナッツ:ファイナルトライアル
- その他追加ピーナッツ．その時に説明.

現在の成績は e ラーニングサイトで見られるようになる予定.
欠席届ピーナッツ的に考慮されたい場合は, 専用用紙に事情を説明する書類を貼って, 授業前後各 5 分に提出 (事前事後とも可．ファイナルトライアルが締切)．欠席に事前連絡は不要．何回欠席しても期末試験受験資格を失うことはありません.
オフィスアワー火 6, 木 6(1-502)．月金昼も在室時は訪問歓迎．お弁当可.

参考書

現象の数学 B 小形 で小形, 振動・波動, 裳華房 (1999) より引用.

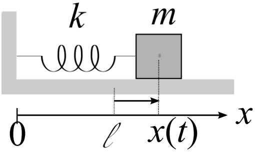
これまでの科目の内容をがんがん使っていきます.

線形代数 松本 で松本, 線形代数入門 — 理論と計算法徹底ガイド, 共立出版 (2007) より引用.
物理数学 高木 I で高木, 力学 (I), 裳華房 (2001) より引用, 高木 II で高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用.
力学 佐川本間 で佐川-本間, 力学, 丸善 (2012) より引用.
数理モデル基礎 I 川薩四 で川野-薩摩-四ツ谷, 微分積分＋微分方程式, 裳華房 (2004) より引用.

ばねの運動の運動方程式を立てよう

物理数学 II 高木 I §4.1 小形 §1.2 佐川本間 §4.4

- 質量 m
- 時刻 t における位置 $x(t)$
- $\boxed{}$ ℓ
- のび=自然長からのずれ (符号付)= $\boxed{}$



フックの法則

ばねの復元力の

- 大きさは $k \times |$ のび $|$
- 向きはのびと逆向き
- $\boxed{}$ k

今の場合, (符号付) のび $= x(t) - \ell$. 力 $F = \boxed{}$.

運動方程式

$$\boxed{} = -k(x(t) - \ell)$$

覚え方: (左辺の x'' の係数が正なら) 右辺の $x(t)$ の係数はいつでも負. 戻す向きの力だから.

ばねの運動の運動方程式を解こう

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k\ell}{m}$$

これって数理モデル基礎 I のりでいうと, どんな微分方程式?

- 2 階
- $\boxed{\qquad\qquad}$ $\cdots$ x が出てくるところは $(x^{\prime\prime\cdots\prime})^1$ のみ. 1 for 1 乗.
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ $\cdots$ x の 0 次の項 $\boxed{\quad}$ がある

微分方程式の一般解の求め方

数理モデル基礎 I

川薩四 §10.6

(せ) 斉次微分方程式 (非斉次項, つまり x について 0 次の項, を 0 とおいた方程式) の一般解を求める $u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$.

(ひ) 非斉次微分方程式 (そのままの方程式) の解を, やまかんでもいいからひとつ求める (特解) $X(t)$.

(わ) 非斉次微分方程式の一般解は $x(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + X(t)$.

例

Example

単振動の微分方程式

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k\ell}{m}$$

の一般解を求めよう.

オイラーの公式

$\theta \in \mathbb{R}$ のとき, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$\omega = \sqrt{k/m}(>0)$$

$$\begin{aligned} x(t) =& \underbrace{C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)}_{\text{斉次方程式の一般解}} + \underbrace{\ell}_{\text{非斉次方程式の特解}} \\ =& \sqrt{C^2+D^2}\left(\cos\omega t \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} + \sin\omega t \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\right) + \ell \\ =& A\cos(\omega t - \theta) + \ell \end{aligned}$$

θ は, $\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}, \sin\theta = \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}$ となるような $\theta \in \mathbb{R}$ を選ぶと, cos の加法定理で上のように変形できる

単振動の ‘公式’

$$u''(t) = -\omega^2 \cdot u(t)$$

の一般解は

$$\begin{aligned} u(t) =& C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \\ =& A\cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

初期条件から積分定数を決めろって言われたら?

例えば $x(0) = 4, x'(0) = \frac{1}{2}$ のような初期条件.
(C_1, C_2), (A, B), (C, D), (A, θ) のどの段階で決めてもよい.
変形していくと, 最後は同じ形になる.

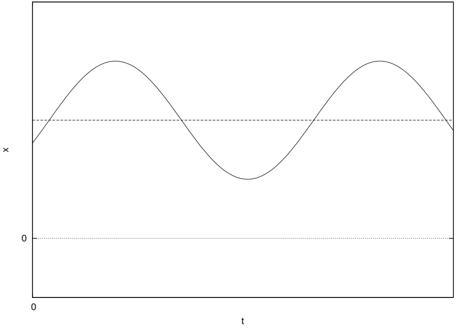
Quiz(単振動のグラフ)

微分方程式 $x'' = -9(x-4)$ で, 初期条件 $x(0) = 3$, $x'(0) = 3\sqrt{3}$ のとき,
解を求めてグラフを描こう.

Quiz(単振動のグラフ)

微分方程式 $x'' = -4(x-8)$ で, 初期条件 $x(0) = 10$, $x'(0) = 4$ のとき, 解を求めてグラフを描こう.

- $A > 0$ $\boxed{}$
- ω $\boxed{}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\boxed{}$
- $f = \frac{1}{T}$ $\boxed{}$



- $\omega t - \theta$ $\boxed{}$
- $-\theta$ $\boxed{}$

連絡

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

小形 p.1–p.11

- コイルとコンデンサ 小形 例題 1.2(p.7),
- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)
- コイルとコンデンサ 小形 1 章演習問題 [7](p.14)

次回の予習ポイント

- 力の合成　物理数学 I
- 運動方程式の立て方　物理数学 II

予習復習問題毎週水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は次の週の月曜日 23:55．今週は…