理論物理学特論[1]

龍谷大学理工学研究科数理情報学専攻　　2003年07月09日樋口さぶろお[2]

13　マルコフ連鎖と遷移行列

マルコフ連鎖 (離散時間, 離散空間 (状態)) の CK 方程式は,

$$P(x,t+1)=\sum_{x'} T_1(x|x')P(x',t) \tag{1}$$

である. 遷移確率 $T_1(x|x')$ を行列 $M=(M_{xx'})=(T_1(x|x'))$ (遷移行列といわれる), $P(x,t)$ をベクトル $\vec{u}(t)={}^{\mathrm{t}}(P(1,t),P(2,t),\ldots)$ と思うと, 行列とベクトルの積を使って,

$$\vec{u}(t+1)=M\vec{u}(t),\quad \text{すなわち}\quad \vec{u}(t)=M^t\vec{u}(0) \tag{2}$$

と書き直せる.

次の遷移行列に従う $x=1,2,3$ の 3 状態 (3 点) からなるマルコフ連鎖を考えよう.

$T_1(x|x')=M_{xx'}=$ (3)

$x\backslash x'$	1	2	3
1	7/10	1/10	1/30
2	1/5	3/5	1/5
3	1/10	3/10	23/30

M の固有値固有ベクトルは

$$\lambda=\tfrac{2}{5},\tfrac{2}{3},1,\qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \tag{4}$$

である.

1. $P(1,0)=P(2,0)=P(3,0)=\frac{1}{3}$ のとき, $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}P(1,t)\\P(2,t)\\P(3,t)\end{pmatrix}$ を求めよう.
2. 一般の初期条件で, 極限 $t\to\infty$ での確率 $\vec{u}(\infty)$ を求めよう.

タームプロジェクト1

上の遷移行列にしたがうマルコフ連鎖について, いくつかの初期条件のもとで, 計算機で実際に行列の積を計算することによって, 横軸 t, 縦軸 $P(1,t),P(2,t),P(3,t)$ のグラフを描こう.

[1]`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/`　`http://hig3.net/` からもいける.

[2]`mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501