発散とガウスの発散定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L10(2011-06-29 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-06-28 Tue 08:51 JST hig"

今日の目標

1. ベクトル場の発散を計算できる
2. ガウスの発散定理を使って計算を簡単にできる
3. ガウスの発散定理の意味を説明できる

http://hig3.net

略解 (線積分 (マーク 2)) R_θ は回転行列のこと.

1. 2 つの曲線 C_{1A} と C_{1B} に分割する.
   y 軸上の部分 C_{1A} は $\mathbf{r}_{1A}(t) = (0,2) + (0,-1)t \ (0 \le t \le 2)$.
   $R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{1A}}{\mathrm{d}t}(t) = R_{\frac{\pi}{2}}(0,-1) = (1,0)$. これは指定の向きと逆なので
   $-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{1A}}{\mathrm{d}t}(t) = -(1,0)$ を用いる.
   $$\int_{C_{1A}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_0^2 (0, 3(2-t)) \cdot (-1,0) \, \mathrm{d}t = 0.$$
   x 軸上の部分 C_{1B} は $\mathbf{r}_{1B}(t) = (-1,0)t \ (0 \le t \le 2)$.
   $R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{1B}}{\mathrm{d}t}(t) = R_{\frac{\pi}{2}}(-1,0) = (0,-1)$. これは指定の向きと逆なので
   $-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{1A}}{\mathrm{d}t}(t) = -(0,-1)$ を用いる.
   $$\int_{C_{1B}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_0^2 (2(-t), (-t) + 3 \cdot 0) \cdot (0,1) \, \mathrm{d}t = -2.$$
   よって, $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = 0 + (-2) = -2.$

2. パラメタ表示 $\mathbf{r}(t) = (0,2) + (-2,-2)t \ (0 \le t \le 1)$ をとると，指定の向きの法線ベクトルは
$-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = -R_{\frac{\pi}{2}}(-2,-2) = -(2,-2) = (-2,2)$.

$$\int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_0^1 (2(-2t), (-2t) + 3(2-2t)) \cdot (-2,2) \, \mathrm{d}t = 8.$$

3. パラメタ表示 $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t) \ (\frac{1}{2}\pi \le t \le \pi)$ より，

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \mathbf{V}(2\cos t, 2\sin t) \cdot \left(-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \mathbf{V}(2\cos t, 2\sin t) \cdot (2\cos t, 2\sin t) = 5\pi - 2.\end{aligned}$$

略解 (ベクトル場の線積分マーク 2)

∂D のパラメタ表示 $\mathbf{r}(t) = 3(\cos t, \sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$.
$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 3(-\sin t, \cos t)$. これを $\frac{1}{2}\pi$ 回転した法線ベクトル
$3(-\cos t, -\sin t)$ は指定された向きと逆なので, -1 倍した
$\mathbf{N} = 3(\cos t, \sin t)$ を用いる.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} 3(\cos t + 2\sin t, -3\cos t + 4\sin t) \cdot 3(\cos t, \sin t) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

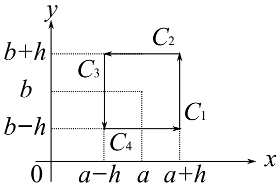
$\cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$ で $[0, 2\pi]$ で積分すると 0 になる, 半角公式
$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ で $[0, 2\pi]$ で積分すると π になる, などを使うと,

$$
I = 3 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1) \cdot \pi = 45\pi.
$$

最後の問はどこかで再出題

ベクトル場の小さな領域の境界に沿った線積分マーク 2

領域 D として 点 (a, b)
を中心とする, 一辺 $2h$ の小さな正方形を考える. 単位法線ベクトルを外向きにとる. 小高 §6.2



$$I = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

$$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s, \ldots$$

どれも $-h \le t \le h$, 始点 $\mathbf{r}(-h)$, 終点 $\mathbf{r}(+h)$ のパラメタ表示.

C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (a + h, b + t)$, $\mathbf{N} = (1, 0)$.

C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (a - t, b + h)$, $\mathbf{N} = \boxed{\quad}$.

C_3: $\mathbf{r}_3(t) = (a - h, b - t)$, $\mathbf{N} = \boxed{\quad}$.

C_4: $\mathbf{r}_4(t) = (a + t, b - h)$, $\mathbf{N} = \boxed{\quad}$.

$\mathbf{V} = (V_1, V_2)$.

$$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_{-h}^{+h} \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{N}(t) \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-h}^{+h} \mathbf{V}(a+h, b+t) \cdot (1, 0) \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-h}^{+h} V_1(a+h, b+t) \, \mathrm{d}t$$

$\mathbf{V}$ は一般だからこれ以上計算できないな〜

ことを使おう!

復習

2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y) = (a,b)$ における 1 次のテイラー展開

$$f(a+h, b+t) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}$$

$V_1 = f$ と思って,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-h}^{+h} +V_1(a+h, b+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-h}^{+h} + \left(V_1(a,b) + h\frac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと} \right) \mathrm{d}t \\
&= + \left[V_1(a,b)t + h\frac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)t + \text{偶関数} + \text{ちょっと} \right]_{-h}^{+h} \\
&= +2h \cdot V_1(a,b) + 2h^2 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + 0 + \text{ちょっと}.
\end{aligned}
$$

$$I_3 = \int_{-h}^{+h} -V_1(a-h, b-t)\,\mathrm{dt} = -(2h\cdot V_1(a,b) - 2h^2\cdot \tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \text{ち})$$

$$I_4 = \int_{-h}^{+h} -V_2(a+t, b-h)\,\mathrm{dt} = -(2h\cdot V_2(a,b) - 2h^2\cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ち})$$

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} +V_2(a-t, b+h)\,\mathrm{dt} = +(2h\cdot V_2(a,b) + 2h^2\cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ち})$$

$$\begin{aligned} I =& I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ =&(2h)^2(\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)) + \text{ちょっと} \\ \simeq&(\text{正方形の面積}) \times (\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)) + \text{ちょっと} \end{aligned}$$

結局, D を正方形領域とすると, 面積分 $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}S$ を使って,

$$\int_{\partial D} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_D (\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b))\mathrm{d}S$$

小高 式 (6.5),(6.7)

発散の定義

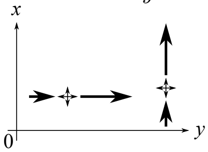
ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ の 発散 とは

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (V_1, V_2) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}.$$

発散は点 $\mathbf{r}$ での水の湧き出しの程度 (吸い込みなら負) を表す 小高 §6.2

発散が正の状況

$\frac{\partial V_1}{\partial x} > 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial y} > 0$



渦度の記号の意味

本当は 3 次元で考えたい. 外積. ここだけ縦ベクトル.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

z 成分を表す記号: $W_3 = (\mathbf{W})_z$

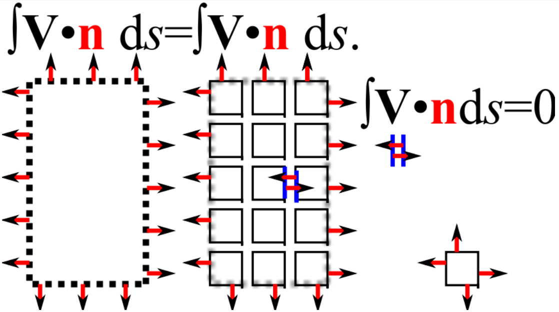
実は小さい正方形領域ばかりでなく，どんな領域 D でも成立する．

ガウスの発散定理

D: 平面の領域．$\mathbf{n}$: ∂D の外向き単位法線ベクトル．$\mathbf{V}$: ベクトル場．

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_D (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) \mathrm{d}S.$$

意味: 漁網から出て行く水=漁網内のわき水 – 水漏れ 小高 式 (8.3)



証明 小高 p.172–173

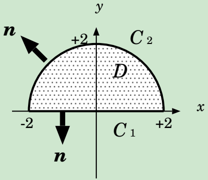
問題 (ガウスの発散定理)

1. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (xy^2, 2y)$ に対して発散 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ を求めよう.
2. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 2y^2 - 3)$ とする. 図の半円板領域を D としたとき, 面積分 $\displaystyle\int_D \nabla \cdot \mathbf{V}\, \mathrm{d}S$ を計算しよう.
3. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 2y^2 - 3)$ とする. 線分 C_1, 半円弧 C_2 に対して, 線積分マーク 2 $I_i = \displaystyle\int_{C_i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s$ を求めよう.

   $\partial D = C_1 \cup C_2$ なので, ガウスの発散定理から

$$I_1 + I_2 = \int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \int_D \nabla \cdot \mathbf{V}\, \mathrm{d}S$$

   となってるはずだけど, 本当に成り立ってる?



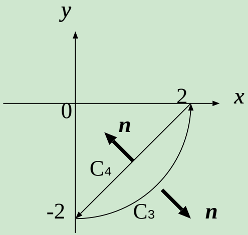
問題 (線積分マーク 2)

$(0,0)$,$(2,0)$,$(2,0)$ を 3 頂点とする三角形の内部を領域 D とする．ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (xy(x+y)^3, xy\mathrm{e}^{(x+y)^2})$ を考える．面積分 $\displaystyle\int_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}\mathrm{d}S$ を，ガウスの発散定理を利用して計算しよう．

問題 (ガウスの発散定理)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x+2y, -3x+4y)$ を考える. 曲線 C_3 (原点を中心とする $\frac{1}{4}$ 円弧) と C_4 (線分) をとる. また, 図のように単位法ベクトル $\mathbf{n}$ の向きを決める.

1. 線積分マーク 2 $\displaystyle\int_{C_3} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \int_{C_4} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$ を, ガウスの発散定理を使って面積分に直して求めよう.
2. 線積分マーク 2 $\displaystyle\int_{C_3} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \int_{C_4} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$ を, 線積分マーク 2 の普通の計算方法に従って求めよう.



連絡

- 大注意: 前回から予習復習問題の締切を 1 日早めてます．月曜 26:00=火曜 02:00 が締切．その後に正解をチェックしてから quiz に参加できるでしょ．

教科書のお奨め問題

- ベクトル場の発散 小高 問題 6.9(p.128), 章末問題 [6.3],[6.4](p.148)
- ガウスの発散定理 小高 問題 8.1(p.174)

ベクトル場の発散 $\nabla \cdot \mathbf{V}$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用